微分流形与黎曼几何
aka 微分流形及应用

Differenial Manifolds and Riemannian Geometry
aka Differential Manifold and its application

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

February 23, 2012

Introduction 相互介绍

students 学生.

姓名：
导师，研究方向：
联系方式：
你想学什么？

Instructor 教师.

- 张思容：
- 方向：几何，形状分析，医学图像分析；
- 联系方式：
  zhangsirong@buaa.edu.cn
  电话：134-3920-1025,
  办公室：图书馆西配楼501室
- 兴趣：reading, playing soccer,...

Chapter 1: Introduciton 课程导引

现代数学

- 现代数学起源（？）：1930's Nicolas Bourbaki School:
  With the goal of founding all of mathematics on set theory, the group strove for utmost rigor and generality, creating some new terminology and concepts along the way.
- 现代数学对象：经典数学(欧几里德空间) $\mapsto$ 现代数学(流形+结构)
- 范畴与算子：category and functors
- 应用：微分几何，微分方程，数学物理，力学，统计，模式识别，医学图像，。。。

现代数学及其应用的重要思想和工具

- 局部到全局：local → global
- 线性到非线性：linear → nonlinear
- 有限到无穷：finite dimension → infinite dimension
- 流形上的微积分：连续？ 微分？积分？

什么是微分流形?

- manifold=mani+fold
- 微分流形=manifold+differential structure, 微分几何=微分流形+Riemannian Metric
- 流形作为解空间：$AX+B=0 \to$ 线性空间； $AX^2+BX+C=0$ 曲线； ... $F(x)=c$, 水平集(level sets), $F^{-1}(c)$ 流形
- 推广：张量丛，纤维丛，orbifold, varifold, ...

课程内容

课程目标： 介绍微分流形的基本概念，方法，学习推广微积分到微分流形的数学过程，应用于阅读现代文献。
预备知识： 微积分，线性代数，了解一点拓扑，几何的概念。
参考书：

- （公共课教材) 现代数学基础，北京航空航天大学。
  参考：Spivak,Michael: Calculus on Manifolds.(流形上的微积分)
- (数学系教材)
  微分流形与黎曼几何引论（英文版）， W.M. Boothby, 人民邮电出版社；
  参考：陈维桓：微分流形初步；白正国等:黎曼流形初步。
- 推荐书： 陈省生，陈维桓：微分几何讲义。
  Lee,John.M.: Introduction to smooth manifolds.
  Lang,Serge: Differential and Riemannian Manifolds.
  微分几何及其应用： J.Oprea, 机械工业出版社。

课程学习

课程大纲: 介绍， 微分流形及映射；向量场和微分；微分形式和积分；曲率和几何。

- 上课：3节课+1节Question and Answer (Q& A)
  提问! Don't waste your time and my time! 提问与成绩挂钩。
- 作业5-6次：抄袭作业成绩为零!
  可以合作但独立提交完成。
- 大作业TBD: 讲解课程中相关定理或问题；
- 成绩评估(TBA)
  公共课研究生：平时作业50+大作业30+参与20=100
  数学系研究生：平时作业60+大作业20+参与20=100

欧几里德空间作为拓扑空间

- 拓扑空间$(X, \mathcal{T})$: $\mathcal{T}$开集:区分不同点,建立邻域,极限概念。
  $\mathcal{B} = \{(a, b)\}$ 生成 $(\mathbb{E}^n, \mathcal{T})$:
- 连续映射: $(X, \mathcal{T}_x) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_y)$
  定义: $\forall U \in \mathcal{T}_y, f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_x$,, 定义: 同胚
- 拓扑性质: Hausdoff(T2),可数基(A2),连通, 紧致:
  ***代数拓扑: 同调群, 基本群(同伦群).
- 空间构造: 子空间, 乘积空间, 商空间, 覆盖空间,连通和。
- 欧几里德空间作为度量空间: $d(x, y) = |x - y|$, Cauchy 序列,
  定理: $[a, b]$是紧致集.
  定理: $\mathbb{E}^n$是完备空间。(Cauchy 序列收敛到一点)

欧几里德空间作为向量空间

- 向量空间$(V, \mathbb{F})$: 加法群+数乘。线性相关
  定理: V由线性无关的基$\mathbb{B}$生成。
  特别基有限时,记为$DIM = n$, $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
- 线性映射: $V \xrightarrow{f} W$ 保 加法+数乘. 行列式$\det f$.
  定理: 线性映射由基映射对应的矩阵决定。
  $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = (d_1, d_2, \dots, \dots d_m) M_{mxn}$
- 对偶空间: $V^* = \{f : V \to \mathbb{R}\}$,对偶基$\epsilon^i(e_j) = 1$, $\iff$ $i = j$
  定理: $V^{**} \cong V$.记$\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$.
- 空间构成: 子空间, 乘积空间。核空间, 像空间。
- 内积: $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ 双线性: 对称, 正定, 三角不等式。
  记为$\langle v, w \rangle|_\rho$.正交基, Gram-Schmidt算法。
  定理: ρ给出V与V^*的一个对应。 $\rho(v)w = \langle v, w \rangle$.

欧几里德空间作为可测空间

- 可测空间$(X, \mathcal{M})$. $\mathcal{M}$是σ代数: 构造集合的和运算。特别$\mathcal{M}$包含开集, *Borel*可测。
- 测度: $\mu : \mathcal{M} \mapsto [0, +\infty]$ 满足可数个不相交集合的加法。
  $\mu(\sum_n^{+\infty} U_n) = \sum_n^{+\infty} \mu(U_n)$
- 构造测度: 完备化, 乘积测度(Fubini定理), 有界线性泛函(Rieze 表示定理);
- Lebesgue 测度: $\mu([a, b)) = b - a$
- *Riemann-Stielties 测度: 有界变分函数空间
- 我们只要考虑黎曼积分: 有界函数的非连续点的测度为零则黎曼可积。

什么是拓扑流形?

Definition (n维拓扑流形M)

M是个拓扑空间, 并满足:

1. 局部同胚与n维欧几里德空间
2. *Hausdorff* 空间*(T2)*
3. 有可数个基*(A2)*

Remark

历史注记:
1854 B.Riemann;1902 D.Hilbert;1913 H.Weyl
主要问题: 拓扑流形的分类。
两个拓扑空间是同胚的当且仅当存在连续的映射和逆映射。

局部欧几里德空间

Definition (局部欧几里德空间)

任一点$p \in M$,存在开邻域上同胚映射$\phi : U \to \mathbb{E}^n$。

Remark

我们称 (U, ϕ)为M的一个坐标卡。
$\phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$

Proposition

1. 欧几里德空间的单位开球$B_n(1)$同胚于$\mathbb{E}^n$
2. 任意两个相交的坐标卡在交集上也是同胚。*(坐标变换)*

Hausdorff 空间

Definition (Hausdorff 空间: T2)

如果M上任一两点p, q,存在两个不相交的开集U, V,使得$p \in U, q \in V$

Proposition

1. 任一收敛序列的极限是唯一的。
2. 每一个点是闭集。

可数基

Definition (基)

$\mathcal{B}$是一族M的子集，并满足

1. 任一点属于$\mathcal{B}$中某个集合；
2. 如果$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$并且$x \in B_1 \cap B_2$,则存在另一个$B_3 \in \mathcal{B}$ 使得$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Remark

$\mathcal{B}$中元素的并集生成一个M上拓扑$\mathcal{T}$。
$\mathcal{B}$中元素可数时称为$A2$.

Remark (其他拓扑性质)

连通性：假设M是连通的。
紧致：M是局部紧致的。
基本群：M的基本群是可数的。

常见例子

EXAMPLE (函数的图像)

设函数$F : U \subset R^n \to R^k$连续，记函数的图为
$\Gamma(F) = \{(x, y) \in R^n \times R^k : x \in U, y = F(x)\}$
$\Gamma(F)$是个n维流形。
定义$\phi_F(x, y) = x$,$(\Gamma(F), \phi)$是一个全局坐标卡。

EXAMPLE (n维球面)

记$S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$.证明：$S^n$是$n$维流形。

EXAMPLE (n维环面)

记$T^n = S^1 \times S^1 \dots S^1$.

EXAMPLE (n维射影空间)

记RP^n是R^{n+1}中的一维子空间的集合。

构造新流形

Proposition

- M的每个开子集是n维流形。
- 乘积流形$M_n \times N_p$ 是 $n+p$维流形。
- *** 流形的连通和是流形。

Remark

带边流形：局部同胚与上半空间$\mathbb{H}^n$,*Hausdorff*，有可数基的拓扑空间。

应用实例

- 经典几何：曲线，曲面(球面,环面)
- 复分析：黎曼曲面
- 代数：$GL(n,R)$，$SL(n,R)$,$O(n)$，$U(n)$;
  $SO(1)\cong S^1, SU(1)\cong S^3$
- 代数几何：代数多项式的解(variety),奇异点，复射影空间。
- 经典力学：m点系统的微分方程组，可以看作流形上的常微分方程组(动力系统).
- 相对论：4维时空流形，*Lorentz* 度量，满足爱因斯坦方程(偏微分方程).
  宇宙的整体形状？ 有一个局部密度的重要参数决定。
- 量子场论：string 论：4维时空+6维Calabi-Yau流形。

拓扑流形的分类

代数方法 $\to$ 代数拓扑

1. 三角化定理：每个1，2，3维拓扑流形同胚与一个单纯复形。($n=2$ Rado 1925; $n=3$ Moise 1977)
   $n=4$,存在反例，$n>4$未知。
2. 一维分类定理：每个一维拓扑流形同胚单位园或实数轴。
3. 二 维分类定理：每个紧致二维拓扑流形同胚单位球面，或环面的连通和，或射影平面的连通和。(1907)
   欧拉示性数：$\chi(M)=v+F-E$, 对应有$\chi(M)=2,2-2n,2-n$
4. 三 维分类定理：Poincare 猜想：任一基本群平凡的紧致三维流形同胚与S^3.
   S.Smale(1961):$n\geq 5$ 正确。
   M.Freedman(1982):$n=4$ 正确。
   W.Thurston(1970)：几何化猜想：任一紧致三维流形可以切成有限块，每块上有八个中的一个几何结构。
   G.Perelman(2003)：证明。
5. 4 维及以上分类定理：A.Markov(1958)证明不存在分类算法。