微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
sirongzhang@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

February 25, 2009

课程简介

What to study in this course?

Key to Modern Mathematics
Tools for math and its application
What is differential manifolds?

Course introduction

Content
Information

Introduction

students.
姓名：
导师，研究方向：
联系方式：
你想学什么？

Instructor.

- 张思容：
- 方向：几何，形状分析，医学图像分析；
- 联系方式：
  电话：134-3920-1025，图书馆西配楼501室
- 兴趣：reading, playing soccer,...

现代数学的基本语言

- 现代数学起源（？）：1930's Nicolas Bourbaki School: With the goal of founding all of mathematics on set theory, the group strove for utmost rigor and generality, creating some new terminology and concepts along the way.
- 现代数学对象：经典数学(欧几里德空间) $\mapsto$ 现代数学(流形+结构)
- 范畴与算子：category and functors
- 应用：微分几何，微分方程，数学物理，力学，统计，模式识别，医学图像，。。。

数学及其应用的重要思想和工具

- 局部到全局：local → global
- 线性到非线性：linear → nonlinear
- 有限到无穷：finite dimension → infinite dimension
- 流形上的微积分：连续？ 微分？积分？

什么是微分流形？

- manifold=mani+fold
- 微分流形=manifold+differential structure, 微分几何=微分流形+Riemannian Metric
- 流形作为解空间：$AX+B=0 \to$ 线性空间；$AX^2+BX+C=0$ 曲线；... $F(x)=c$, 水平集(level sets), $F^{-1}(c)$ 流形
- 推广：张量丛，纤维丛，orbifold, varifold, ...

内容

- 介绍微分流形的基本概念，方法。→ Ideas
- 学习推广微积分到微分流形的数学过程。→ Theory
- 应用于阅读现代文献。→ language, tool

参考书

预备知识：
微积分，线性代数，了解一点拓扑，几何的概念。

- 陈省生，陈维桓：微分几何讲义。(Lectures on Differential Geometry) Recommendation
- 陈维桓：微分流形初步。Recommendation
- Spivak,Michael: Calculus on Manifolds.(流形上的微积分)
- Lee,John.M.：Introduction to smooth manifolds.
- Lang,Serge：Differential and Riemannian Manifolds.

大纲

- Introduction and calculus on Euclidean spaces,
- Differential manifolds and tangent spaces,
- Multilinear algebra and tensors,
- Differentiation and vector fields,
- Integration and differential forms,
- Fundamental theorems of Calculus,
- *Lie group,
- ***Advanced topics: generalization and application.

课程信息

- 上课时间：周三（9-10节）主南304,周五（9-10节）主南306.
- 办公时间：周四(12pm-2pm)或预约。 图书馆西配楼501
- 联系方式：134-3920-1025. sirongzhang@buaa.edu.cn
- 课程网站：sites.google.com/site/sirongzhang/

评分

- Total(100pts)=HW(60pts)+Inclass(10pts)+Presentation(30pts).
- Homeworks:there are about 7 HWs, each worths 10pts. The best six of seven are counted.
- Final Presentation: The grade is based on in-class presentation(20pts) and project report(Latex)(10pts).
- Inclass(10pts): encouragement for in-class questions.

Final Presentation

- Presentation topics (Chosen by Week 8) : below are some examples, you could choose your topic(and need the instructor's approve). * Infinite dimension manifolds(Banach manifolds and Hilbert manifolds) * Complex manifolds, Kahlerian manifolds; * Fiber bundle, Jet bundle; * Integral manifolds; * Symplectic manifolds, Poisson manifolds; * Riemannian manifolds and general relativity; * Orbifolds and Superstring theory, * Current, varifold, geometry measure theory; * Algebraic manifolds; * Statistical manifolds;
- Project content:
  - Each presentation includes background, concepts, methods and main results.
  - In-class presentation(time TBA): each person for 20-30 minutes. All students grade others' presentations by A,B,C.
  - Paper: in PDF format due week 16.

课程简介

What to study in this course?

- Key to Modern Mathematics
- Tools for math and its application
- What is differential manifolds?

Course introduction

- Content
- Information

欧几里德空间回顾

Topology and Continuity

Vector space and Linearity

Measure space and Integral

欧几里德空间作为拓扑空间

- 拓扑空间$(X, \mathcal{T})$: $\mathcal{T}$开集:区分不同点,建立邻域,极限概念。
  $\mathcal{B} = \{(a, b)\}$ 生成 $(\mathbb{E}^n, \mathcal{T})$:
- 连续映射:$(X, \mathcal{T}_x) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_y)$
  定义:$\forall U \in \mathcal{T}_y, f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_x$,, 定义:同胚
- 拓扑性质:Hausdoff(T2),可数基(A2),连通,紧致:
  ***代数拓扑:同调群,基本群(同伦群).
- 空间构造:子空间,乘积空间,商空间,覆盖空间,连通和。
- 欧几里德空间作为度量空间:$d(x, y) = |x - y|$,Cauchy 序列,
  定理:$[a, b]$是紧致集.
  定理:$\mathbb{E}^n$是完备空间。(Cauchy 序列收敛到一点)

欧几里德空间作为向量空间

- 向量空间$(V, \mathbb{F})$:加法群+数乘。线性相关
  定理:V由线性无关的基$\mathbb{B}$生成。
  特别基有限时,记为$DIM = n$, $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- 线性映射:$V \xrightarrow{f} W$ 保 加法+数乘. 行列式$\det f$.
  定理:线性映射由基映射对应的矩阵决定。
  $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (d_1, d_2, \ldots, ...d_m)M_{mxn}$
- 对偶空间:$V^* = \{f : V \to \mathbb{R}\}$,对偶基$\epsilon^i(e_j) = 1, \iff i = j$
  定理:$V^{**} \cong V$.记$\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$.
- 空间构成:子空间,乘积空间。核空间,像空间。
- 内积:$\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ 双线性:对称,正定,三角不等式。
  记为$\langle v, w \rangle|_\rho$.正交基,Gram-Schmidt算法。
  定理:ρ给出V与V^*的一个对应。 $\rho(v)w = \langle v, w \rangle$.

欧几里德空间作为可测空间

- 可测空间$(X, \mathcal{M})$. $\mathcal{M}$是σ代数：构造集合的和运算。特别$\mathcal{M}$包含开集，*Borel*可测。
- 测度：$\mu : \mathcal{M} \mapsto [0, +\infty]$ 满足可数个不相交集合的加法。$\mu(\sum_n^{+\infty} U_n) = \sum_n^{+\infty} \mu(U_n)$
- 构造测度：完备化，乘积测度(Fubini定理)，有界线性泛函(Rieze 表示定理)；
- Lebesgue 测度: $\mu([a, b)) = b - a$
- *Riemann-Stielties 测度：有界变分函数空间

欧几里德空间回顾

Topology and Continuity

Vector space and Linearity

Measure space and Integral

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
sirongzhang@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

February 27, 2009

Lecture 2: Review of Calculus in $\mathbb{E}^n$

什么是微分?

Question:
什么是导数? 什么是全微分? $\square$

Answer:
全微分是在函数某点附近的线性逼近。
导函数在每一点的值是一个线性映射。 $\square$

Remark (注记:)
1920 Banach 空间的微分分析建立。 Frechet, Hilderbrandt,...
Reference: Serge Lang, Real and Functional Analysis(GTM142).

线性映射

记从$E \to F$的线性映射集合为$L(E, F)$.

Definition
$f : U \subseteq \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^m$在$p$点是可微的：如果存在连续线性映射 $\lambda : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^m$ 和 $\psi : B_\varepsilon \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^m$,使得 $\lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = 0$ and

$$f(p + h) = f(p) + \lambda(h) + \psi(h)$$

Remark
我们记 $\psi(h) = o(h)$, $\lambda(h) = Df(p)(h)$。

Proposition
1. *线性映射$\lambda(h)$在一点处是唯一的。*
2. *f在p点可微，则f在p点连续。*

导函数或全微分,偏导数

Definition

如果f在$U \subseteq \mathbb{E}^n$上处处可微，可定义导函数: $f' : U \to L(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}^m)$, $f'(p) = Df(p) \in L(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}^m)$. f'也记为Df,称为全微分。

Proposition

1. *D 是线性的, 满足乘积的莱布尼茨法则，满足复合的链式法则;*
2. *f是常值函数，$Df = 0$. f是线性映射，$Df = f$.*

Definition

记$\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \mathbb{E}_n$, 记$f^i : \mathbb{E}_i \to \mathbb{E}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$,称其导函数为$f$的第$i$个偏导数, 记为$D_i f$或$\frac{\partial f}{\partial p_i}$。

Remark

$DF = (D_1 F, D_2 F, ...D_n F)$， 在基下的表示为 $m \times n$矩阵。

二阶导数

Definition

已知导函数: $DF : U \to L(\mathbb{E}, \mathbb{R})$, 定义二阶导数为$D^2 f : U \to L(\mathbb{E}, L(\mathbb{E}, \mathbb{R}))$. 类似可以定义高阶导数$D^k f$.

Remark

$L(\mathbb{E}, L(\mathbb{E}, \mathbb{R})) \cong L(\mathbb{E}, \mathbb{E}; \mathbb{R}).L(\mathbb{E}, \mathbb{E}; \mathbb{R})$是$E \times E \to R$的双线性函数。简记为$L^2(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

Proposition

1. *$w : E \times E \to R$是双线性函数，则$Dw : U \to L(E \times E, R)$. 有$Dw(p1, p2)(v1, v2) = w(p1, v2) + w(v1, p2)$,$D^2 w = const$,$D^3 w = 0$.*
2. *若$D^2 f(p)$在p点连续，则必然是对称的双线性函数。即$D^2 f(p)(v, w) = D^2 f(p)(w, v)$. 特别有Hessian矩阵。*
3. *设$g : R \to R$的线性映射，则$D^2(g \circ f)(p) = g \circ D^2 f(p)$.*

Remark

对高阶导函数有同样结果。

分段映射

Definition

$f : I \to \mathbb{E}$称为分段映射(step maps), 如果它满足：I由有限不相交的子区间$I_1, \ldots, I_n$覆盖；f在每个区间上为常数v_i。记分段映射空间为$St(\mu, E)$.

Definition

若f是分段映射，定义f在区间$[a, b]$上的积分为$\int_I f := \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{i=n} v_i \mu(I_i)$.

Proposition

- *每个连续函数可以表示为一个分段映射序列f_n的一致收敛极限。从而可以定义连续函数的积分。*
- *积分是$St(\mu, E) \to \mathbb{E}$一个线性映射。(积分保线性,保号性。区间可加性)*
- *设$g : R \to R$的线性映射，则$\int_0^1 (g \circ f)(t)dt = g \circ \int_0^1 f(t)dt$.*

积分中值定理

Lemma

积分不等式 $|\int_I f d\mu| \le \int_I |f| d\mu \le \|f\| \mu(I)$

Theorem (微积分基本定理)

设f在$[0, 1]$上连续，则函数$F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_0^t f$在$[0, 1]$可微，且导函数$DF(p) = f(p)$.

Theorem (积分中值定理)

若$f : U \to \mathbb{F}$有连续导函数，且线段$p + tq$, $0 \le t < 1$包含于U, 有

$$f(p + q) - f(p) = \int_0^1 Df(p + tq)qdt = \int_0^1 Df(p + tq)dt \cdot q$$

Remark

对高阶导函数有同样Taylor公式。

勒贝格积分

Definition

在分段映射空间$St(\mu, E)$上定义 半范数：$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = \int f$。
$St(\mu, E)$按半范数完备化得到的空间记为$L^1(\mu)$.

Remark

勒贝格测度对应于勒贝格积分。
此完备化过程类似于有理数到实数的过程,重要性也一样!

一些相关结果：

- 单调收敛定理(Fatou 引理,控制收敛定理),Fubini 定理;
- 有紧致支集无穷可微函数$C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$在$L^1(\mu, \mathbb{R})$内稠密。
- Rieze 表示定理：$C_c(\mathbb{R}^m)$的正函子λ唯一决定一个正Borel测度μ，且

$$\lambda(f) = \int f d\mu := \langle f, d\mu \rangle$$

微积分的基础定理

Theorem (逆函数定理)

如果$f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点p处$Df(p)$是可逆线性映射，则f在p点附近是个局部同胚。从而存在局部的逆函数。

Theorem (常微分方程局部存在唯一定理)

设$f : U \to E$连续可微，对任一点$p \in U$,唯一存在小区间上积分曲线$F : I \to U$,使得 $DF(t) = f(F(t))$, $F(0) = p$.

Remark

对线性偏微分方程有类似存在定理。

Theorem (Stokes定理)

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

微分流形
Calculus on Differential Manifolds

张思容
sirongzhang@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

March 6, 2009

Lecture 3: Topological and Differential Manifolds

什么是拓扑流形?

Definition (n维拓扑流形M)

M是个拓扑空间，并满足:

1. *局部同胚与n维欧几里德空间*
2. *Hausdorff 空间(T2)*
3. *有可数个基(A2)*

Remark (历史注记:)

1854 B.Riemann;
1902 D.Hilbert;
1913 H.Weyl

局部欧几里德空间

Definition (局部欧几里德空间)

任一点$p \in M$,存在开邻域上同胚映射$\phi : U \to \mathbb{E}^n$。

Remark

我们称 (U, ϕ)为M的一个坐标卡。
$\phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$

Proposition

1. *欧几里德空间的单位开球$B_n(1)$同胚于$\mathbb{E}^n$*
2. *任意两个相交的坐标卡在交集上也是同胚。(坐标变换)*

Hausdorff 空间

Definition (Hausdorff 空间：T2)

如果M上任一两点p, q,存在两个不相交的开集U, V,使得$p \in U, q \in V$

Proposition

1. *任一收敛序列的极限是唯一的。*
2. *每一个点是闭集。*

可数基

Definition (基)

$\mathcal{B}$是一族M的子集，并满足

1. *任一点属于$\mathcal{B}$中某个集合；*
2. *如果$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$并且$x \in B_1 \cap B_2$,则存在另一个$B_3 \in \mathcal{B}$ 使得$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$*

Remark

$\mathcal{B}$中元素的并集生成一个M上拓扑$\mathcal{T}$。
$\mathcal{B}$中元素可数时称为A2.

Remark (其他拓扑性质)

连通性：假设M是连通的。
紧致：M是局部紧致的。
基本群：M的基本群是可数的。

构造新流形

球从内变到外
Sphere turns inside out

Proposition

- *M的每个开子集是n维流形。*
- *乘积流形$M_n \times N_p$ 是 $n+p$维流形。*
- **** 流形的连通和是流形。*

Remark

带边流形：局部同胚与上半空间$\mathbb{H}^n$,Hausdorff，有可数基的拓扑空间。

常见例子

EXAMPLE (函数的图像)

设函数$F: U \subset R^n \to R^k$连续，记函数的图为
$\Gamma(F) = \left\{(x, y) \in R^n \times R^k : x \in U, y = F(x)\right\}$
$\Gamma(F)$是个n维流形。
定义$\phi_F(x, y) = x$,$(\Gamma(F), \phi)$是一个全局坐标卡。

EXAMPLE (n维球面)

记$S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$.证明：$S^n$是$n$维流形。

EXAMPLE (n维环面)

记$T^n = S^1 \times S^1 \ldots S^1$.

EXAMPLE (n维射影空间)

记RP^n是R^{n+1}中的一维子空间的集合。

应用实例

- 经典几何：曲线，曲面(球面,环面)
- 复分析：黎曼曲面
- 代数：$GL(n,R)$, $SL(n,R)$,$O(n)$, $U(n)$;
  $SO(n) \cong S^1, SU(n) \cong S^3$
- 代数几何：代数多项式的解(variety),奇异点，复射影空间。
- 经典力学：m点系统的微分方程组，可以看作流形上的常微分方程组(动力系统).
- 相对论: 4维时空流形，*Lorentz* 度量，满足爱因斯坦方程(偏微分方程).
  宇宙的整体形状？ 有一个局部密度的重要参数决定。
- 量子场论：string 论：4维时空+6维Calabi-Yau流形。

拓扑流形的分类

代数方法 → 代数拓扑

1. 三角化定理：每个1，2，3维拓扑流形同胚与一个单纯复形。($n=2$ Rado 1925; $n=3$ Moise 1977)
   $n=4$,存在反例，$n>4$未知。
2. 一维分类定理：每个一维拓扑流形同胚单位园或实数轴。
3. 二 维分类定理：每个紧致二维拓扑流形同胚单位球面，或环面的连通和，或射影平面的连通和。(1907)
   欧拉示性数：$\chi(M)=v+F-E$, 对应
   有$\chi(M)=2, 2-2n, 2-n$
4. 三 维分类定理：Poincare 猜想：任一基本群平凡的紧致三维流形同胚与S^3.
   S.Smale(1961):$n \geq 5$ 正确。
   M.Freedman(1982):$n=4$ 正确。
   W.Thurston(1970): 几何化猜想：任一紧致三维流形可以切成有限块，每块上有八个中的一个几何结构。
   G.Perelman(2003): 证明。
5. 4 维及以上分类定理：A.Markov(1958)证明不存在分类算法。

什么是微分结构?

Definition (n维拓扑流形M上的微分结构)

M是个拓扑空间，$\mathcal{A}\{(U_a,\phi_a): a\in I\}$是一族坐标卡，并满足：

1. *$\{(U_a,\phi_a): a\in I\}$ 是M的一个开覆盖；*
2. *属于$\mathcal{A}$的任两个坐标卡是C^r相关的；*
3. *$\mathcal{A}$是C^r极大的。*

称$\mathcal{A}$为M上一个C^r微分结构。
称$(M,\mathcal{A})$为一个n维C^r微分流形。

Remark (不同类别)

C^0 拓扑流形
C^∞ 光滑流形
C^ω 实解析流形 $\mathbb{C}^\omega$ 复解析流形 $n=2m$

光滑Atlas 地图册

Definition (C^r相关(相容))

如果M上的任两个相交坐标卡$(U,\phi),(V,\psi): U\cap V\neq\emptyset$,满足$\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$是$C^r$映射(同胚)。
称$\psi\circ\phi^{-1}$为坐标卡的过渡映射(transition map)。
称$(U,\phi),(V,\psi)$是C^r相关。

Definition (光滑Atlas)

如果M上的坐标卡集合$\mathcal{A}$覆盖M, 并且 其中任两个相交坐标卡$(U,\phi),(V,\psi)$,满足 $\psi\circ\phi^{-1}$是光滑微分同胚。
称$\mathcal{A}$为M上的一个光滑Atlas。 属于光滑Atlas的坐标卡称为容许光滑坐标卡。

Remark

1. *所有坐标卡的集合构成C^0地图册。*
2. *Atlas不是唯一的；$\mathcal{A}_1=\{(R^n,Id)\},\mathcal{A}_2=\{(B_1(x),Id_{B_1(x)})\}$*

极大地图册和坐标表示

Definition (极大地图册)

称M上地图册$\mathcal{A}$是极大的，如果任一坐标卡与$\mathcal{A}$中的每一个坐标卡都是光滑相容的， 它必然属于$\mathcal{A}$。

Proposition

1. *M上任一地图册包含于一个极大地图册。*
2. *有一个全局坐标卡的拓扑流形是一个光滑流形。*

Remark (坐标表示)

1. *任一坐标卡(U, ϕ)给出U上一个曲纹坐标。任一点$p \in U$的坐标表示$\phi(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)|_p$.*
2. *例子：极坐标$\phi(p) = (\rho, \theta)$定义在$U = (x, y) : x > 0$上。*

构造新光滑流形

Proposition

- *光滑M的每个开子集是n维光滑流形。*
- *乘积光滑流形$M_n \times N_p$ 是 $n + p$维光滑流形。*
- ****用R^n中开子集(pull-back)定义集合M的拓扑结构和微分结构。*

Remark (Einstein和式约定:)

记$\sum_{i=1}^{i=n} x^i e_i = x^i e_i$,$i$是隐含指标(dummy index)。

常见例子

EXAMPLE (全局坐标卡)

函数的图像;
R^1的两个光滑结构：(R^1, Id),$(R^1, \phi) : \phi(x) = x^3$;

EXAMPLE (n维球面)

S^n应用图像的地图册和球极投影的地图册决定同一个光滑结构。

EXAMPLE (n维向量赋范空间)

记$\mathbb{V}^n$的基为$E_i : i = 1, ..n.R^n$的基为$e_i : i = 1, ..n$.
存在全局坐标卡$\phi : \mathbb{V} \to R^n : \phi(X) = \phi(x^i E_i) = x^i e_i$.
注意它与基的选取无关，称为标准光滑结构。

EXAMPLE (矩阵)

*$m \times n$矩阵是mn维光滑流形。$n \times n$可逆矩阵$GL(n, \mathbb{R})$是n^2维光滑流形。***Grassman流形：n维向量空间的k维子空间集合$G(n, k)$是$n(n - k)$维光滑流形。*

实射影空间

EXAMPLE (RP^n)

设x是R^{n+1}中任一非零点， 记$[x]$为过x, 0的直线(一维子空间).
RP^n的拓扑由映射$\pi : R^{n+1} \to RP^n, \pi(x) = [x]$决定。
坐标卡U_i, ϕ_i为$U_i = \pi(W_i) : W_i = \{x^i \neq 0\}$,

$$\phi_i[x^1, x^2, ..., x^{n+1}] = (\frac{x^1}{x_i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x_i})$$

$$\phi_i^{-1}(u^1, u^2, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n)$$

设$i > j$,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u^1, u^2, ..., u^n) = (\frac{u^1}{u_j}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{u_j}, \frac{u^{j+1}}{u_j}, \frac{u^{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u^i}{u_j}, \ldots, \frac{u^n}{u_j})$$

光滑映射

Definition (光滑映射)

F为从光滑流形M到N的映射，f称为光滑的，如果任一$p \in M$,存在光滑坐标卡(U, ϕ)包含p,存在光滑坐标卡(V, ψ)包含$F(p)$,并且$F(U) \subset V$，复合映射$\psi \circ F \circ \phi^{-1}$是光滑映射($\phi(U) \to \psi(V)$).
记$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$为$F$的坐标表示。

Proposition

- *F是光滑的与坐标卡的选取无关；*
- *每个光滑映射是连续映射；*
- *光滑映射的复合是光滑的；*

Remark

微分同胚(Diffeomorphism):存在光滑逆映射的光滑映射$F : M \to N$,是M到N的一个光滑同胚。

常见例子

EXAMPLE (光滑函数，光滑曲线)

$f : M \to R$;记为$C^\infty(M)$，是个无穷维向量空间(流形？)
$f : I \to M$;光滑曲线(流)

EXAMPLE (嵌入与覆盖映射)

子空间嵌入：$\imath : S^n \to R^{n+1}$
乘积流形投射：$\pi_1 : M \times N \to M$
商映射：$\pi : R^{n+1}/0 \to RP^n$

EXAMPLE (微分同胚)

R^1 微分结构等价：$(R^1, Id) \to (R^1, \phi)$：$f : t \to t^{1/3}$
开球与R^n同胚。$f(x) = x/(1 - |x|^2)$

微分拓扑的结果

微分结构 $\to$ 微分拓扑

Theorem (单位分解)

(A_2)光滑流形上存在一序列(可数)光滑f_i，满足
$0 \leq f_i \leq 1$,*suppf_i紧致*，$\sum f_i = 1$.

1. 光滑微分结构唯一(Munkers, Moise)：$n \leq 3$ 微分同胚意义下唯一.
2. 欧几里德空间唯一：$n \neq 4$
   $n = 4$,无穷多。(1984) Donaldson, Freedman.
3. 紧致流形:存在拓扑流形无微分结构。$n > 3$;
   Milnor 怪球 S^7上有28个微分结构。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
sirongzhang@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

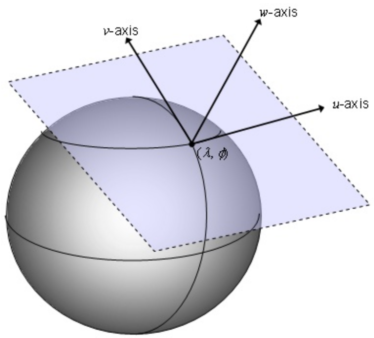
March 16, 2009

Lecture 4: Tangent Space and Submanifolds

怎样计算光滑映射微分？

Question:
什么是导数？什么是全微分？ □

Answer:
全微分是在函数某点附近的线性逼近。
导函数在每一点的值是一个线性映射。 □



Remark
定义流形每一点处的线性空间？
定义对应映射在每一点的线性逼近？
说明定义与坐标卡选取无关!

欧几里德空间的切向量

Definition (几何切向量空间)
任一点$p \in R^n$,记$\mathbb{R}^n_p = (p, v) : v \in R^n$.
称v为在p点的切向量。

Remark
切向量构造方向导数:
$D_v|_p f = D_v f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv)$
$D_v|_p$是$C^\infty(R^n) \to \mathbb{R}$的一个线性映射。且满足乘积法则。

欧几里德空间的导子空间

Definition (光滑函数的导子)

一个线性映射$X : C^\infty(R^n) \to \mathbb{R}$称为在$p$点的导子(derivation)。如果满足$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.

Remark

记导子组成空间是线性空间，记为$T_p(R^n)$，称为p点的切空间。

Lemma (导子的性质)

1. f是常值函数,$Xf = 0$
2. $f(p) = g(p) = 0, X(fg) = 0$

切空间即几何向量空间

Theorem (切空间同构)

如果R^n上任一点p,映射:$v_p \to D_v|_p$是一个从R^n_p到$T_p(R^n)$的同构。

Proof.

1. 映射是线性的;
2. 映射是单的;
3. 映射是满的;
   Taylor展开$f(x) = f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - p^i) + \sum g_i(x)(x^i - p^i)$

□

Corollary

$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$组成$T_p(R^n)$的一组基。

流形的切空间

Definition (光滑流形上的切空间)

一个线性映射$X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$称为在$p$点的导子(derivation)。 如果满足$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.
所以在p点导子组成的线性空间成为在p点的切空间$T_p(M)$.

Lemma (导子的性质)

1. f是常值函数,$Xf = 0$
2. $f(p) = g(p) = 0, X(fg) = 0$
3. 若在p点的某邻域上$f = g$，有$Xf = Xg$.

流形的切映射

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

Definition (push-forward 切映射)

给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p定义$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$,
$F_*(X)(f) = X(f \circ F)$

Proposition (切映射性质)

1. F_*是线性的;
2. 复合链式法则$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$
3. 若F是微分同胚， F_*是线性同构。
4. 特别开子集嵌入$i : U \to M$诱导$i_* : T_p(U) \to T_p(M)$同构。

坐标卡的表示和计算

Corollary

(ϕ, U)为M在p点的一个坐标卡,则 $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$组成$T_p(M)$的一组基。
其中$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\phi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(p)}$称为坐标卡向量。
记$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,$X^i$是坐标分量;

Remark

给定光滑映射$F: M \to N$，坐标表示$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$；
有$F_*(\frac{\partial}{\partial x^i})|_p = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}$.
称F_*为$DF(p), df(p), F'(p)$,即全微分!

Proposition (坐标卡变换)

设$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_p$为两个坐标卡的基； 基变换$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p$
坐标变换 $\tilde{X}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) X^i$

光滑曲线的切向量

Definition

记光滑曲线$r: I \to M$，曲线在t_0点的切向量为
$r'(t_0) = r_* \left(\frac{d}{dt}|_{t_0}\right) \in T_{r(t_0)} M$.
也记为$\frac{dr}{dt}(t_0)$.

Remark

特别$r'(t_0) f = \frac{d(f \circ r)}{dt}(t_0)$ 即欧氏曲线的导数!
坐标表示 $r'(t_0) = (r^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{r(t_0)}$

Proposition

- 每个切向量$X \in T_p(M)$，存在曲线在该点的切向量为X
  $\to$ 曲线等价类=切空间?
- 复合曲线的链式法则 $(F \circ r)'(t_0) = F_*(r'(t_0))$

切空间的等价定义

- 光滑函数的germ芽：$f \sim g, f = g|_U$ 记为C_p^∞
  $T_p(M)$即C_p^∞上的导子空间。
- 光滑曲线等价类：在一点的切向量相同的曲线；
- 满足坐标变换规律的向量 $\to$ 张量。

余切空间

Definition (余切空间)

在点p的余切空间为$T_p(M)$的对偶空间，记为$T_p^*(M)$.
记为ω,基为dx^i。

Definition (余切映射pushback)

给定光滑映射$F: M \to N$，在任一p定义$F^*: T^*_{F(p)} N \to T^*_p M$,
$F^*(\omega)(X) = \omega(F_* X)$。

Remark

光滑函数的微分df取值是余切向量!
$f(p+v) - f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p(v) = df_p(v)$

光滑映射的秩

Definition (映射的秩)

给定光滑映射$F: M \to N$，在任一p切映射为$F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$, 定义F的秩为线性映射F_*的秩。记为$rank(F)$。
特别如果$rank(F) = k$对每一点都成立，称F是秩为k的常秩映射。

Definition (常秩映射的分类)

给定光滑映射$F: M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = dimN$,称F是淹没映射; 如果$rank(F) = dimM$,称F是浸入映射;
特别如果对有子集拓扑的像$F(M) \subset N$，F是浸入，
且$F: M \to F(M)$是拓扑同胚，称F是光滑嵌入映射。

Remark

F是淹没映射即F_*是满射;
F是浸入映射;即F_*是单射;
存在拓扑嵌入不是光滑嵌入映射。

例子

EXAMPLE

投射是淹没映射: $\pi_1: M_1 \times M_2 \to M_1$
映入(包含)是浸入映射: $i: M_1 \to M_1 \times M_2$

EXAMPLE (环面)

定义:$T: R^2 \to R^3$为$T(\phi, \theta) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$
T是浸入，诱导环面的嵌入。

EXAMPLE (光滑曲线)

定义八字形(figure 8): $r: (-\pi/2, 3\pi/2) \to R^2$为$r(t) = (\sin 2t, \cos t)$. 它是浸入($r'(t) \neq 0$)不是嵌入。
定义环面曲线: $r_c: R \to S^1 \times S^1$为$r_c(t) = (e^{i2\pi t}, e^{i2\pi ct})$. 是浸入，$c$为无理数不是嵌入!

映射的秩定理

Theorem (逆函数定理)

给定光滑映射$F: M \to N$，在任一p切映射F_*为双射，则存在邻域$p \in U, F(p) \in V$,使得$F|U: U \to V$是微分同胚。称为局部微分同胚。
特别$dimM = dimN$,F是淹没或浸入，都是局部微分同胚。

Theorem (秩定理)

给定光滑映射$F: M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = k$,则任一点p处存在光滑坐标卡$(\phi U), (\psi, V)$使得F的坐标表示$\hat{F}(x^1, x^2, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$.
即常秩映射局部可以看成线性映射。

Theorem (常秩映射分类)

给定光滑映射$F: M \to N$是常秩的，如果F是满射，F是淹没;
如果F是单射，F是浸入；如果F是双射，F是微分同胚。

Definition (嵌入子流形)

子集$S \subset M$满足：任一点$p \in S$,存在M上光滑坐标卡ϕ, U, 有$\phi(U \cap S) = (x^1, x^2, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$.
S称为嵌入k维子流形，$codim(S) = n - k$.

Definition (浸入子流形)

子集$S \subset M$满足：S是k维流形，且$i: S \to M$是光滑浸入映射。
S称为浸入k维子流形，$codim(S) = n - k$.

Remark

每个嵌入子流形是浸入子流形。
浸入子流形的拓扑比作为子集的拓扑细。

嵌入子流形的例子

EXAMPLE (函数的图)

$\Gamma(F) = \{(x, y) \in R^n \times R^k : x \in U, y = F(x)\}$是嵌入子流形。
特别局部是函数图的集合是嵌入子流形，如S^n.

EXAMPLE (矩阵子群)

$SL(n) = \{detA = 1\}$是$det^{-1}(1)$,闭的嵌入子流形。$n^2 - 1$维
$O(n) = \{AA^\tau = 1\}$是$f^{-1}(Id)$,闭的嵌入子流形。$(n-1)n/2$维。

Remark

带边流形的边界是$n-1$维闭的嵌入子流形。

子流形的判别法则

Theorem (嵌入,浸入子流形)

嵌入子流形 $\equiv$ 嵌入映射的像。
浸入子流形 $\equiv$ 浸入映射的像。

Definition (水平集)

给定光滑映射$F : M \to N$, $F^{-1}(p)$称为水平集；
若$F_*(p)$是满射，称p为F的正则点，否则为临界点。
若$F^{-1}(q)$都是正则点，称q为正则值，对应的原像为正则水平集；否则为临界值。

Theorem (映射的水平集)

给定光滑映射$F : M \to N$是常秩的，如果$rank(F) = k$,任一水平集是一个闭的嵌入子流形$(codim = k)$.
特别F是淹没映射，任一水平集是闭的$codimN$维嵌入子流形。
另外，任一正则水平集是闭的$codimN$维嵌入子流形。

子流形的微分拓扑结果

- Sard Theorem: 任一个临界值的原像的测度为零。
- Whitney 浸入定理: 任一n维光滑流形可以看作R^{2n}的浸入子流形。（可改进为$2n-1$)
- Whitney 嵌入定理：任一n维光滑流形可以看作R^{2n+1}的嵌入子流形。（可改进为$2n$)
- Whitney 逼近定理:任一光滑流形上的连续函数可有一个光滑函数来逼近。
- 管状邻域定理：R^n的每个嵌入子流形存在管状邻域。
- Whitney 逼近定理:任两光滑流形间的连续映射可有一个光滑映射来同伦逼近。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

March 23, 2009

Lecture 5: Tensors and Bundles

线性空间和线性函数

Remark (线性空间)

记V为n维线性空间，基为e_i,任一元素$v = x^i e_i$.
基变换:$\hat{e}_i = Ae_j = a_i^j e_j$,记$A = (a_i^j), A^{-1} = (b_j^i)$
坐标变换$v = x^j e_j = \hat{x}^i \hat{e}_i$, $\hat{x}^i = (A^\tau)^{-1} x^j = b_j^i x^j$

Remark (线性函数空间$L(V;R)$)

记V^*为n维线性空间的对偶空间，基为δ^i,任一元素$\alpha = f_i \delta^i$.
基变换:$\hat{\delta}^i = B\delta^j = b_j^i \delta^j$,记$A = (a_i^j), B = (A^\tau)^{-1}$
坐标变换$\alpha = f_j \delta^j = \hat{f}_i \hat{\delta}^i$, $\hat{f}_i = (B^\tau)^{-1} f^j = Af_j = a_i^j f_j$.

线性空间的对偶

Remark (对偶配对)

给定V, V^*上的对偶基，$\langle \delta^i, e_j \rangle = \delta_j^i$,
基变换矩阵的关系$A = (a_i^j), B = (A^\tau)^{-1}$.

Remark (切空间对偶)

给定$T_p(M), T_p^*(M)$上的对偶基$\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^i$，$\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \rangle = \delta_j^i$,
基变换矩阵:$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$
对偶基变换$d\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} dx^j$, 即$B = (A^\tau)^{-1}$.
任一双线性函数给出一个配对。比如内积。

多重线性函数

Definition (多重线性函数)

$f: V_1 \times V_2 \cdots V_r \to R$对每个自变量是线性的，称为$V_1 \times V_2 \cdots V_r$上的$r$重线性函数，记为$L(V_1, \ldots, V_r; R)$.
基$e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{ri}$,维数为$n_1 n_2 \ldots n_r$.

Definition (张量)

f是$V_1 \times V_2 \cdots V_r$上的$r$重线性函数，$V_i$是$V$或$V^*$之一，称$f$是一个张量。
$r = p + q$,其中p是V^*的个数，q是V的个数,称为(p, q)型张量。
记为V_q^p或 T_p^q.

Remark (协变与反变)

$L(V, R)$坐标对应变换与基变换相同，称为协变；
$V = L(V^*, R)$坐标对应变换与基变换为转置逆关系，称为反变；
p为反变阶数，q为协变阶数。

张量的例子

- (0,0)：实数
- (1,0)：向量(切向量)
- (0,1)：线性函数(余切向量df)
- (0,2)：双线性函数，(0,n) 多重线性函数(det)
- (1,1)：线性变换

Definition (张量积)

f是(p_1, q_1)张量，g是(p_2, q_2)张量，则
$f \otimes g(\alpha^1, \ldots, \alpha^{p_1+p_2}, v_1, \ldots, v_{q_1+q_2}) =$
$f(\alpha^1, \ldots, \alpha^{p_1}, v_1, \ldots, v_{q_1}) \cdot g(\alpha^{p_1+1}, \ldots, \alpha^{p_1+p_2}, v_{q1+1}, \ldots, v_{q_1+q_2})$
它是$(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$型张量。

Proposition

张量积满足分配律和结合律。 $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$,
$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

张量的基表示

Proposition (张量的基)

设V, V^*上基为e_i, δ^i,则(p, q)上的张量是n^r维空间，f在基下的坐标为

$$f^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = f(\delta^{i_1}, \ldots, \delta^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$$

.
坐标变换:

$$\hat{f}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = b^{i1}_{k_1} \cdots b^{i_p}_{k_p} a^{l_1}_{j_1} \cdots a^{l_q}_{j_q} f^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q}$$

可用坐标来定义张量(Ricci).

Remark (基的张量积表示)

$f = f^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \delta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{j_q}$.

空间的张量积

Definition (空间的张量积)

向量空间V, W的张量积是由$v \otimes w$生成的向量空间。v, w看成V^*, W^*上线性函数。 记为$V \otimes W$

Proposition

- $V \otimes W$是$dim(V) \cdot dim(W)$维向量空间
- $V \otimes W \cong L(V^*, W^*; R)$

Proposition (张量积空间的特征)

任一V, W, X向量空间；如果$A: V \times W \to X$是双线性映射，存在唯一线性映射$\hat{A}: V \otimes W \to X$ 满足

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V \otimes W \arrow[ur, "\hat{A}"'] & \end{tikzcd}$$

张量代数

Definition (张量代数)

记$T(V)=\bigoplus_{p,q\geq 0}T^q_p$,向量的加法，数乘和张量积构成一个代数。
特别它是分次代数。

Remark

特别记协变张量代数: $T(V)=\bigoplus_{q\geq 0}T^q_0$;
反变张量代数: $T(V^*)=\bigoplus_{p\geq 0}T^0_p$;

Definition (对称张量)

任一$(0,k)$阶协变张量是对称的
$f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=f\circ\sigma_k(x_1,x_2,\ldots,x_k)$， σ_k是k阶置换群的任一元素。记为$\Sigma^K(V)$;

也有反对称张量。

度量张量

Remark (内积张量)

$\langle,\rangle$是对称(正定)双线性函数, 即二阶协变张量。记为g
设基为e_i，对偶基δ^i; $g_{ij}=g(e_i,e_j)$, $g=g_{ij}\delta^i\otimes\delta^j$. (g_{ij})是对称矩阵。
记g^{ij}为g_{ij}的逆矩阵，$g^\sharp=g^{ij}e_i\otimes e_j$是二阶反变张量。称为$g$的共轭张量。

切空间上黎曼度量$g_{ij}dx^i\otimes dx^j$

Proposition

- *g给出$V\to V^*$的一个同构 $F(v)=g(v,\cdot)$.*
- *指标上升下降: h_{ij},$h_i^j=h_{ik}g^{kj}$,$h^i_j=h_{kj}g^{ki}$,$h^{ij}=h_{kl}g^{ki}g^{lj}$*

切丛

Definition (切丛 Tangent bundle)

给定光滑流形M，定义流形的切丛$TM=\coprod_{p\in M}T_pM$.
每一点记为(p,X), 自然投射$\pi:TM\to M,\pi(p,X)=p$
$(p,X),X_p,X$都指p点的切向量。

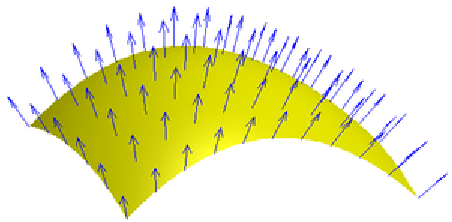
Theorem (切丛是光滑流形)

设M是n维光滑流形，则TM是$2n$维光滑流形，且$\pi:TM\to M$是光滑映射。

Corollary

$F:M\to N$是光滑映射，则$F_*:TM\to TN$是光滑映射。

切向量场



Definition (切向量场 Tangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的切向量场$Y:M\to TM$是一个连续映射，且满足$\pi\circ Y=Id_M$.
特别光滑映射是光滑向量场。Y也称为π的一个截面。(section)

Remark

坐标表示$Y(p)=Y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.
Y是光滑的当且仅当坐标函数Y^i是光滑的。

余切丛

Definition (余切丛 cotangent bundle)

给定光滑流形M，定义流形的余切丛$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M$.
每一点记为(p,ω), 自然投射$\pi : T^*M \to M, \pi(p,\omega) = p$

Definition (余切向量场 cotangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的余切向量场$\omega : M \to T^*M$是一个连续映射，且满足$\pi \circ \omega = Id_M$.

Proposition

- T^*M是$2n$维光滑流形，且$\pi : TM \to M$是光滑映射。
- $F : M \to N$是光滑映射，则$F^* : T^*N \to T^*M$是光滑映射。
- $\omega = \omega_i dx^i$是光滑的当且仅当坐标函数ω_i是光滑的。

定义

Definition (向量丛)

给定光滑流形E, M,光滑映射$\pi : E \to M$是满射，V是k维向量空间；称 $E \to M$是M上的阶为k的向量丛，如果

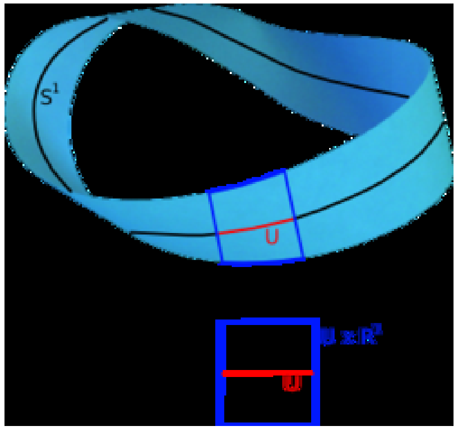
1. $E_p = \pi^{-1}(p)$是个与V的同构,
2. 任一点p存在局部平凡化映射$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$是光滑同胚, 满足

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Remark

E称为丛空间，M是底空间，π是丛投影，E_p是纤维。
两个局部平凡化映射的过渡函数：$\tau : U \cap V \to GL(k, R)$.

例子



EXAMPLE (乘积丛)

$E = M \times R^k$,称为平凡丛。即存在全局平凡化映射。

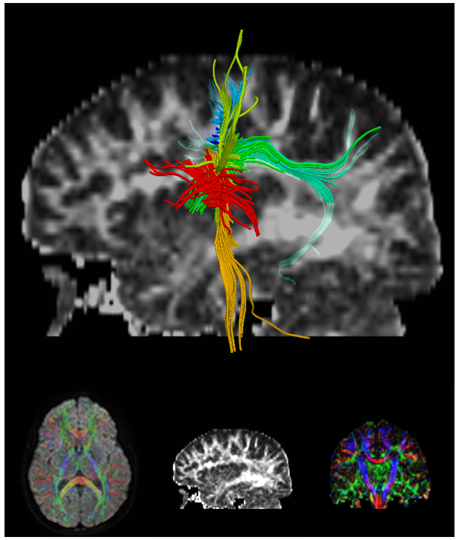
EXAMPLE (Möbius bundle)

$E = I \times \mathbb{R}/ \sim \to S^1$.
$k = 1$称为线丛。

EXAMPLE

切丛和余切丛。
张量丛：$T_l^k(M) = \coprod_p T_l^k(T_pM)$.

Diffusion Tensor Imaging



光滑截面

Definition (section)

光滑映射$s: M \to E$满足$\pi \circ s = Id_m$，称为(E, M, π)的一个光滑截面。
记为$s \in \Gamma(E)$. 特别有定义在开集上的局部截面。

Definition (标架场frame)

如果存在$s_1, s_2, \dots, s_k$是线性无关的(即在每一点$p \in M$,$s_i(p)$是E_p的基), 称$\{s_i\}$是M上一个标架场。
类似有局部标架场。

Remark

局部平凡化对应局部标架场。
TM上$\frac{\partial}{\partial x^i}$是局部标架场，$T^*M$上$dx^i$是局部标架场(又称为coframe).
全局标架场对应平凡向量丛。

丛映射

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
X_1 \arrow[r, "g"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

Definition (丛映射)

(F, f)是向量从$(E, M, \pi) \to (F, N, \pi')$的丛映射，如果 $\pi' \circ f = F \circ \pi$,且$F|_{E_p}$是线性的。
特别$M = N$时，称F为M上的丛映射。

Remark

- *可以定义丛同构.*
- *切映射,余切映射是丛映射。*
- *三维欧几里德空间的叉积是TR^3到TR^3的丛映射。 内积是TR^3到$R^3 \times R$的丛映射。*

范畴

Definition (范畴 category)

范畴$\{C, Hom\}$有一类对象X(objects),对象间同态$f = Hom_C(X, Y)$，及组合同态$(f, g) = g \circ f$; 且满足

1. *同态的结合律 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,*
2. *存在单位同态：$f \circ Id = Id \circ f$*

特别f称为同构如果$f \circ g = Id, g \circ f = Id$.

EXAMPLE

- *集合和集合映射 SET*
- *拓扑空间和连续映射 TOP*
- *光滑流形和光滑映射SM, 向量丛和丛映射VB*
- *向量空间和线性映射VECT*
- *群和同态GROUP, 李群和李同态LIE*

函子

Definition (FUNCTOR)

C, D是范畴，$\mathcal{F}: C \to D$是协变函子, 如果满足

1. *$X \in C, \mathcal{F}(X) \in D$,$f \in Hom_C(X, Y)$;*
2. *$\mathcal{F}(f) \in Hom_D(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(Y))$.*
3. *$\mathcal{F}(Id) = Id_{\mathcal{F}(X)}$; $\mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h)$*

Remark

- *类似可以定义反变函子。*
- *切函子:协变函子 $SM \to VB$ 余切函子：反变函子!*
- *代数拓扑： $TOP \to GROUP$ 同调群，同伦群**

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

March 27, 2009

Lecture 6: Vector fields and Differentiation

切向量场

Definition (切向量场 Tangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的切向量场$Y : M \to TM$是一个连续映射，且满足$\pi \circ Y = Id_M$.
Y也称为切向量丛的一个截面。(section)

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \subset TM \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \phi(U) \times R^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ U \subset M \arrow[r, "\phi"'] & \phi(U) \end{tikzcd}$$

Proposition

坐标表示$Y(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.$\hat{Y}(x) = (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x), \ldots, Y^n(x))$.
Y是光滑的当且仅当坐标函数Y^i是光滑的。$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$是光滑向量场。

切向量场的性质

Proposition (局部扩充)

给定M上的点$p, X_p \in T_pM$，存在光滑切向量场$\tilde{X}$，满足$\tilde{X}_p = X$.
特别可以在局部U上定义切向量场。

Proof.

取局部邻域U, 光滑bump函数φ的支撑集包含于U,令$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,

$$\tilde{X}(q) = \begin{cases} \varphi(q)X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(q) & q \in U \\ 0 & q \notin supp\varphi \end{cases} \tag{1}$$

□

Proposition (切向量场空间)

记$\mathcal{T}(M)$为M上光滑向量场。$\mathcal{T}(M)$是向量空间;
$(aY + bz)_p = aY_p + bZ_p$.也是环$C^\infty(M)$上的模。$fY(p) = f(p)Y_p$.

切向量场作用于函数

Definition

给定M上光滑切向量场Y,光滑函数f，定义$Yf(p) = Y_p f \in C^\infty(M)$.
特别定义在局部U上决定。

Proposition (光滑判定)

给定M上切向量场Y。Y是光滑的当且仅当Yf是光滑的，对任一光滑函数f。

Proposition (切向量场是导子)

定义：线性映射$F: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$满足$F(fg) = fF(g) + gF(f)$ 称为导子。 记$\mathcal{T}(M)$为M上光滑向量场。
则$C^\infty(M)$上导子与$\mathcal{T}(M)$一一对应。

切向量场pushforward

Remark

给定M上光滑切向量场Y,光滑映射$F: M \to N$，定义$F_*(Y_p)(f)_{F(p)} = Y(f \circ F)|_p$ 给出切向量的pushforard.
向量场？ $q \notin F(M)$? $F(p_1) = F(p_2)$?

Definition (F相关向量场)

给定M上切向量场Y，N上切向量场Z，光滑映射$F: M \to N$,称Y, Z是F相关的如果$F_*(Y_p) = Z_{F(p)}$.

Proposition (F相关判定)

Y与Z是F相关的当且仅当任一$f \in C^\infty(N)$满足
$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$

Proposition (存在性)

如果F是光滑同胚,则任一M上向量场存在唯一N上F-相关向量场.
记为$F_* Y$

李括号

Remark

给定M上光滑切向量场V, W，VW是否光滑向量场？
反例：R^2 上$V = \frac{\partial}{\partial x}, W = \frac{\partial}{\partial y}$，$f(x, y) = x, g(x, y) = y$,乘积法则不对!

Definition (李括号)

给定M上切向量场V, W，任意光滑函数f，定义李括号$[V, W]f = VWf - WVf$。
$[V, W]$是光滑向量场(导子).
局部定义$[V, W]_p(f) = V_p W(f) - W_p V(f)$

Proposition (局部计算)

局部坐标表示$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，则
$[V, W] = (V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$
简记为$[V, W] = (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$. 特别$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

李括号性质

EXAMPLE

$V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}$; $W = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$,
$[V, W] = -\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$

Proposition (李括号性质)

- 双线性
- 反对称$[V, W] = -[V, W]$
- Jacobi恒等式 $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$
- $[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$.

Proposition (李括号自然性)

设$F: M \to N$，$V_1, V_2 \in \mathcal{T}(M)$,$W_1, W_2 \in \mathcal{T}(N)$，如果$(V_i, W_i)$是$F$相关，则$[V_1, V_2]$与$[W_1, W_2]$是$F$相关.
特别同胚保持李括号。$F_*[V, W] = [F_* V, F_* W]$.

李代数

Definition (李代数)

向量空间$\mathfrak{g}$上映射$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},(X,Y)\to[X,Y]$,满足

- *双线性*
- *反对称$[V,W]=-[V,W]$*
- *Jacobi恒等式 $[V,[W,X]]+[W,[X,V]]+[X,[V,W]]=0$*

称$\mathfrak{g},[]$是个李代数。$[]$又称为Poisson括号。

Definition (李代数同态)

线性映射$A:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$，满足$A[X,Y]=[AX,AY]$.
特别有李代数同构。

EXAMPLE

$\mathcal{T}(M)$; $(R^3,\times)$ Abelian交换李代数$[A,B]=0$.
矩阵$M(n,R)$，$[A,B]=AB-BA$， 记为$\mathfrak{gl}(n,R)$或$\mathfrak{gl}(R^n)$.

余切向量场

Definition (余切向量场 cotangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的余切向量场$\omega:M\to T^*M$是一个连续映射，且满足$\pi\circ\omega=Id_M$.
ω也称为余切向量丛的一个截面。(section),又称微分形式 1-forms.

Proposition

坐标表示$\omega(p)=\omega_i(p)dx^i_p$. $\omega_i(p)=\omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$
ω是光滑的当且仅当坐标函数ω_i是光滑的;当且仅当对任意光滑切向量场X, $<\omega,X>$是光滑的。dx^i是光滑1-form.
记$\mathcal{T}^*(M)$为M上光滑1-form, $\mathcal{T}^*(M)$是向量空间, 也是环$C^\infty(M)$上的模。$f\omega(p)=f(p)\omega(p)$

函数的微分

Remark

R^n上函数f, 梯度场$\nabla f=grad\ f=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$.
是否向量场？坐标变换不是! 例子$f(x,y)=x^2$.

Definition (函数的微分)

任一光滑函数$f:M\to R$,定义微分为$df_p(X_p)=X_pf$.
df是光滑1-形式。特别dx^i是光滑1-形式。$\{dx^i\}$组成coframe.

Remark

$f_*:TM_p\to TR_{f(p)}$与df在p点一致，$TR_{f(p)}\cong R$.
余切向量的几何解释:
微分的几何解释：$f(p+v)-f(p)\approx\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i(v)=df_p(v)$

微分的性质

Proposition

- *线性：$d(af+bg)=adf+bdg$*
- *乘积法*
  则：$d(fg)=fdg+gdf$,$d(f/g)=(gdf-fdg)/g^2,g\neq0$
- *复合：$d(h\circ f)=(h'\circ f)df$*
- *$df=0\Leftrightarrow f\equiv c$*

Proposition (沿曲线的导数)

$r:I\to M$ 是光滑曲线，$f:M\to R$是光滑函数，导函数$(f\circ r)'(t)=df_{r(t)}(r'(t))$.

Proof.

$df_{r(t_0)}(r'(t_0))=r'(t_0)f=(r_*\frac{d}{dt}|_{t_0})f=\frac{d}{dt}|_{t_0}(f\circ r)=(f\circ r)'(t)$ □

$(f\circ r)'(t)$的两种意义：数和切向量。

诱导余切向量场

Definition (pushback)

给定$G: M \to N$,N上余切向量场ω,有$G^*: T^*N \to T^*M: G^*(\omega_p)(X) = \omega_p(G_* X_p)$,
定义：$(G^*(\omega))(p) = G^*(\omega_G(p))$.

Theorem

N上余切向量场ω是光滑的，则$G^*(\omega)$也是光滑的。

Lemma

给定N上光滑函数f，$G: M \to N$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$, 有
$G^* df = d(f \circ G); G^*(f\omega) = (f \circ G) G^* \omega$.

$\boxed{\text{Theorem PROOF:}}$ $G^*\omega = G^*(\omega_i dy^i) = (\omega_i \circ G) d(y^i \circ G)$

诱导1形式的计算

微分形式的不变性
$G^*\omega = G^*(\omega_i dy^i) = (\omega_i \circ G) d(y^i \circ G) = (\omega_i \circ G) dG^i$

EXAMPLE

映射 $G: R^3 \to R^2, G(x, y, z) = (u, v) = (x^2 y, y \sin z)$,
$\omega = udv + vdu$.
$G^*\omega = (u \circ G) d(v \circ G) + (v \circ G) d(u \circ G)$
$G^*\omega = 2xy^2 \sin z dx + 2x^2 y \sin x dy + x^2 y^2 \cos z dz$

EXAMPLE (坐标变换)

$Id: (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$;
$xdy - ydx = Id^*(xdy - ydx) = (r\cos\theta) d(r\sin\theta) - (r\sin\theta) d(r\cos\theta)$
$xdy - ydx = r^2 d\theta$

线积分

Definition (区间积分)

给定ω为[a,b]上微分1形式，定义：$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t) dt$.
注记：定义与参数化无关(微分同胚不变)$\int_{[a,b]} \omega = \int_{[c,d]} \phi^* \omega$

Definition (流形上线积分)

$r: [a, b] \to M$是光滑曲线，$\omega \in \mathcal{T}^*(M)$, 定义：$\int_r \omega = \int_a^b r^* \omega$.
可推广到分段光滑曲线。
注记：任意两点可以被分段光滑曲线相连。

Proposition

计算公式：$\int_r \omega = \int_a^b r^* \omega = \int_a^b \omega_{r(t)}(r'(t)) dt$

线积分微积分定理

Proposition

- 线性；
- 曲线叠加：$\int_r \omega = \int_{r_1} \omega + \int_{r_2} \omega$
- r是常映射，$\int_r \omega = 0$
- 参数化不变：$\tilde{r} = r \circ \phi$, $\int_r \omega = \int_{\tilde{r}} \omega$

Theorem (线积分的微积分定理)

光滑流形M上光滑函数f, $r: [a, b] \to M$是一个分段光滑曲线,有
$\int_r df = f(r(b)) - f(r(a))$

$\boxed{\text{PROOF:}}$ $\int_r df = \int_a^b df_{r(t)}(r'(t)) dt = \int_a^b (f \circ r)'(t) dt$.

向量场的指标

Definition

向量场$V \in \mathcal{T}(M)$，如果$V(p) = 0$,称p点为V的奇点。
孤立奇点的指标：$ind_p V$是向量场围绕p点旋转的圈数。

Theorem (Hopf)

M是紧致光滑流形，V是只有孤立奇点的连续向量场，则指标和等于M的欧拉示性数。

$\sum Ind_p V = \chi(M)$

S^{2n}上不存在处处不为零的切向量场。S^{2n-1}上存在。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

April 3, 2009

Lecture 7: Integral curves and Lie derivatives

积分曲线

Definition (Integral curves)

给定光滑曲线$r : I \to M$，流形上光滑切向量场$Y : M \to TM$，称r是Y的一条积分曲线，如果
$r'(t) = Y(r(t)), t \in I$.
特别：设 $0 \in I$，记$r(0) = p$为曲线的起点。

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\tilde{r}"'] & M \arrow[d, "Y"] \\ & TM \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "Y"] \\ TI \arrow[r, "r_*"'] & TM \end{tikzcd}$$

Remark

- $r_* \circ i$可以看作$\tilde{r}$一条TM中曲线。称为r的提升。
- 局部存在唯一。

积分曲线的性质

EXAMPLE

$Y = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{T}(R^2)$.
$r(t) = (a + t, b)$,唯一，无限长曲线；

EXAMPLE

$W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{T}(R^2)$.
$r(t) = (x(t), y(t))$, $r'(t) = x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} = W$;
解方程：$r(t) = (a\cos t - b\sin t, a\sin t + b\cos t)$,唯一，无限长曲线；

Proposition (平移曲线)

设r是Y的积分曲线，则$\hat{r} : I + a \to M$也是一条Y的积分曲线。

$\boxed{\text{PROOF:}}$
$\hat{r}'(t_0)f = \frac{d}{dt}|_{t_0} f \circ \hat{r}(t) = \frac{d}{dt}|_{t_0} f \circ r(t-a) = (f \circ r)'(t_0 - a) = r'(t_0 - a)f = Y(r(t_0 - a))f = Y(\hat{r}(t_0))f$.

切向量场生成的流

Remark

给定M上光滑切向量场Y,任一点存在唯一一个积分曲线$\theta^p : R \to M$. $\theta'(t) = Y(\theta^p(t))$.
定义：$\theta_t : M \to M; \theta_t(p) = \theta^p(t)$, 给出$M$的一个同胚。
特别$\theta_s \circ \theta_t(p) = \theta_{s+t}(p)$。

Definition (全局流，单参数变换群)

给定光滑流形M。定义：光滑映射 $\theta : R \times M \to M$,满足$\theta(0, p) = p; \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(s + t, p)$. 又称为$R$在流形上的左作用。

Remark

- *θ_t是光滑同胚。*
- *θ^p是点p的轨道，M由不相交的轨道组成。*

流诱导的向量场

定义：$Y(p) = \theta'(0)$, 称为流的无穷小生成元(向量场).

Theorem

给定全局流$\theta : R \times M \to M, Y(p) = \theta'(0)$是一个光滑向量场，且$\theta^p$是它的积分曲线。

Proof.

- Y是光滑的；$Yf(p) = \theta'(0)f = \frac{d}{dt} f \circ (\theta^p) = \frac{\partial}{\partial t} f(\theta(t, p))$.
- 积分曲线。要证$\theta'(t) = Y(\theta^p(t))$
  给定$q = \theta^p(t_0)$,要证$\theta^{p\prime}(t_0) = V_q$.
  $\theta^q(t) = \theta^p(t + t_0)$,
  $V_q f = \theta^{q\prime}(0)f = \frac{d}{dt} f \circ \theta^q = \theta^{p\prime}(t_0)$

$\square$

向量场诱导的局部流

Theorem (局部流，ODE定理)

任一光滑向量场Y，存在唯一的极大局部流$\theta : D \subset R \times M \to M$,它的无穷小生成元是$Y$,且

- *θ^p是唯一极大积分曲线*
- *θ_t是$M_t = (p : (t, p) \in D)$上的微分同胚。*
- *$(\theta_t)_* Y(p) = Y(\theta_t(p))$, 称$Y$是关于$\theta$不变的。*

Remark

M是紧致的光滑流形，任一光滑向量场诱导一个全局流。
时间依赖的向量场$V : R \times M \to TM$诱导时间依赖的局部流。

定义

Remark (欧几里德空间方向导数)

给定V, W方向，$D_V W(p) = \frac{d}{dt} W_{p+tV} = \lim_{t\to 0} \frac{W_{p+tV} - W_p}{t}$;
$D_V W(p) = VW^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$
推广到流形：$W_{p+tV} - W_p$无意义!!! 利用微分同胚。

Definition (向量场的李导数)

给定V, W为M上光滑向量场，记θ为V生成的流，定义李导数$\mathcal{L}_V W_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} = \lim_{t\to 0} \frac{(\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} - W_p}{t}$.

Remark

$\mathcal{L}_V W$是光滑向量场。且与欧几里德空间方向导数定义一致。

李导数与李括号

Theorem

$\mathcal{L}_V W = [V, W] = VW - WV.$

$\boxed{\text{Outline:}}$ $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $\theta = (x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)$

$(\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} = W^i(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\mathcal{L}_V W = \frac{\partial W^i}{\partial x^1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$

Proposition

- $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$
- $\mathcal{L}_V [W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$
- $\mathcal{L}_{[V,W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$
- $\mathcal{L}_V (fW) = (Vf) W + f \mathcal{L}_V W$

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

April 14, 2009

Lecture 8: Connections and covariant derivatives

方向导数与平行移动

Remark

- *方向导数：给定V, W 方向，*
  $D_V W(p) = \frac{d}{dt} W_{p+tV} = \lim_{t\to 0} \frac{W_{p+tV}-W_p}{t}$;
  推广到流形： $W_{p+tV} - W_p$*无意义!!!*
- *李导数: 利用微分同胚。*$\theta_*^{-t} W_{p+tV} - W_p$.
  与局部流有关；不是方向导数!
- *欧几里德空间的方向导数：平行移动*$T_{p+tV}M \to T_pM$
  沿任一曲线移动。
- *测地线：光滑曲线的二次导数与坐标卡有关；*$(\cos t, \sin t) \sim (1, \theta)$;

定义

Definition (仿射联络connection)

定义映射$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$,*记为*$(x, y) \to \nabla_X Y$,*满足*

1. $\nabla_X Y$*对*X*是关于光滑函数的线性映射；*
2. $\nabla_X Y$*对*Y*是关于*R*的线性映射；*
3. *乘积法则：*$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

称为$\nabla_X Y$*是*Y*在*X*方向的共变导数。*

Remark

李导数不是联络。
联络不是张量场。

共变导数的局部性

Proposition (共变导数局部性)

$\nabla_X Y|_p$由X, Y在p的局部值决定。即 $\nabla_X Y|_p = 0$仅当X或Y在p点邻域为零。

Proof.

设Y在邻域U上为零；构造截断函数ϕ的支集包含于U.有$\nabla_X(\phi Y) = 0$，

$\nabla_X(\phi Y) = X(\phi)Y + \phi\nabla_X Y = 0, \nabla_X Y|_p = 0.$

□

Proposition (共变导数方向性)

当X在p点为零，$\nabla_X Y|_p = 0$。

$\boxed{\text{PROOF:}}$ $\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i} Y = X^i \nabla_{\partial_i} Y|_p = 0$

Christoffel函数和存在性

Definition (Christoffel符号)

给定M上局部标架场E_i,定义$\nabla_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$

Γ_{ij}^k称为联络在标架场下的Christoffel符号。一共有n^3个光滑函数。

局部表示： $\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k)E_k$

Theorem (联络的存在性)

任一给定光滑流形M上存在仿射联络。

- 欧几里德联络:$\nabla_X Y = XY^i\partial_i$
- 任一具有全局坐标卡的流形上的联络和n^3个光滑函数Γ_{ij}^k一一对应。

$\boxed{\text{PROOF:}}$ 构造单位分解(ψ^a, U^a),

定义$\nabla_X Y = \sum_a \psi^a \nabla_X^a Y$,验证其为联络。(乘积法则!)

张量场的共变导数

Definition

定义联络$\nabla_X T_r^s \in T_r^s$，满足

- $\nabla_X f = X(f)$,
- $\nabla_X \omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega\nabla_X Y$
- $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X T$

局部表示 $\nabla_X \omega = (X^i\partial_i\omega_k - X^i\omega_j\Gamma_{ij}^k)dx^k$.

Definition (全共变导数)

定义:$\nabla : \mathcal{T}_r^s(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, $\nabla(T, X) = \nabla_X T$,$\nabla T$称为全共变导数，值是一个$(s+1, r)$阶张量场。

任一函数f,$< \nabla f, X >= \nabla_X f =< df, X >$,

共变Hessian: $\nabla\nabla f(X, Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f$

沿曲线的共变导数

Remark (沿曲线的向量场)

给定曲线$r : I \to M$, 沿曲线的向量场$V_r : I \to TM$，满足$V_r(t) \in T_{r(t)}M$. $r'(t)$是一个。

特别给定向量场$V : M \to TM$,可定义$V_r = V \circ r$. V称为V_r的可扩充向量场。

Theorem (沿曲线的共变导数)

给定∇为M上联络，对任一光滑曲线r, 决定一个唯一的导数算子$D_t : V_r \to V_r$. 满足

- 线性；$D_t(aV_r + bW_r) = aD_tV_r + bD_tW_r$
- 乘积法则: $D_t(fV_r) = f'(t)V_r + fD_tV_r$
- 如果存在可以扩充的向量场V,$D_tV_r = \nabla_{r'(t)}V$.

称D_tV_r为V_r沿r的共变导数。

测地线

Definition (测地线)

光滑曲线r称为测地线(关于联络∇)，如果$D_t r' = 0$

Theorem (测地线存在唯一性定理)

给定流形M及联络∇，任一点$p \in M$,任一切向量$V_p \in T_pM$，存在唯一一条测地线$r : I \to M$ 满足$r(0) = p, r'(0) = V_p$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ 给出局部坐标卡,$r(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $V(t) = V^i\partial_i$
局部表示$D_t V = \dot{V}^i\partial_i + V^i\nabla_{r'}\partial_i$
测地线方程$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0$
ODE的存在唯一定理可证。
$\boxed{\text{特别:}}$ 欧几里德空间的测地线是直线。

平行移动

Remark (曲线的平行向量场)

如果$D_t V \equiv 0$,称V沿r平行。特别有流形上的平行向量场，满足$\nabla V \equiv 0$.
欧几里德空间平行向量场满足：坐标为常数。

Theorem (向量的平行移动)

给定曲线$r : I \to M$,任一$p \in M$, $V_p \in T_p(M)$,存在唯一的沿r的平行向量场 V，满足$V(0) = V_p$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ 设存在一个坐标卡包含全部曲线；方程为
$\dot{V}^k + V^i\dot{r}^j\Gamma^k_{ij} = 0$;
线性ODE方程组的解是全局存在唯一的，所以存在唯一的平行向量场。
如果仅仅有局部坐标卡，可以不断延伸得到唯一的平行向量场。

Remark

给定曲线r，可定义切空间同构：$P_{0t} : T_pM \to T_{r(t)}M$；
特别$D_t V_p = \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}_{0t}V(t) - V_p}{t}$

黎曼度量

Definition

给定光滑流形M，g是上面的一个正定对称的二次协变张量场(二次形式), 称为一个黎曼度量。满足

- $g(X, Y) = g(Y, X)$
- $g(X, X) > 0$

称(M, g)是黎曼流形。简记为$\langle X, Y\rangle_g$.
局部坐标表示 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$，由对称性可简记为$g = g_{ij}dx^i dx^j$。

Proposition

- *g赋予切空间一个内积。可以定义长度$|X|^2 = \langle X, X\rangle$，切向量夹角，正交基。*
- *黎曼流形上存在局部正交标架场；(Gram-Schmidt 算法)*

黎曼等距。存在微分同胚$F : M \to N$，使得$F^*g_N = g_M$.称M, N等距的， 黎曼几何研究等距变换下的不变量。

例子

EXAMPLE (欧几里德空间)

$g = \delta_{ij}dx^i dx^j = \sum_i d(x^i)^2$,
二维极坐标变换:$g = dx^2 + dy^2 = d(r\cos\theta)^2 + d(r\sin\theta)^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$.

EXAMPLE (黎曼子流形)

设浸入子流形$i : M \to R^n$,定义诱导度量$g_M(X, Y) = i^*g(X, Y) = g(i_*X, i_*Y) = g(X, Y)$. 注意$X, Y$是$M$上切向量。
球面的诱导度量$\breve{g} = g|_{S^n}$.

EXAMPLE (图流形)

给定映射$f : U \in R^n \to R$, 图流形$\Gamma : F(x) = (x, f(x)) \subset R^{n+1}$, 诱导度量$F^*(g) = F^*(\sum_i^{n+1}(dx^i)^2) = \sum_i^n(dx^i)^2 + df^2$
二维球面局部表示$\breve{g} = du^2 + dv^2 + (d\sqrt{1 - u^2 - v^2})^2$.

切空间与余切空间的诱导同构

Definition (同构)

定义：$g^\flat: TM \to T^*M$, $g^\flat(X)(Y) = g(X,Y)$，记为$X^\flat$.
$g^\flat$是线性同构。
定义: $g_\sharp: T^*M \to TM$ 为以上映射的逆映射, $g_\sharp(X^\flat) = X$.

Remark

局部表示$X = X^i\partial_i, g = g_{ij}dx^i dx^j$,
$X^\flat = g_{ij}X^i dx^j$,称为指标下降；记为$X_i = g_{ij}X^i$;
记$g^\sharp$的矩阵表示$g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$, $\omega = \omega_i dx^i$,
$\omega^\sharp = g^{ij}\omega_i\partial_j$,称为指标上升；$\omega^i = g^{ij}\omega_i$.
以上操作可以对任何张量进行。特别$gradf = df^\sharp$.

推广

Theorem

任一光滑流形存在光滑度量。

Remark

- 伪黎曼流形：$g(X,Y)$对称非奇异。
  Lorentz度量：$g = {dx^i}^2 - (dt)^2$
- 奇异黎曼流形：g定义于TM的子空间；
  控制论：M与一个有赖于控制参数的向量场；
- Finsler 度量：$F: TM \to R$定义一个范数(norm).
  多复分析

相关联络

Definition (度量相容联络)

黎曼流形上的联络满足$\nabla_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.
记为$\nabla g \equiv 0$.

Proposition

平行向量场保持内积。
特别平行移动给出切空间的等距变换。

Definition (对称联络)

定义联络的挠张量：$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.
如果$\tau \equiv 0$,称联络为对称的或无挠的。
局部表示: $T_{ij}^k = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$
等价于$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

黎曼联络的存在唯一

Theorem

任一光滑黎曼流形上存在唯一一个与度量相容且对称的联络。称其为黎曼联络。或Levi-Civita联络。

Proof.

联络的表示：利用$X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$;
$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, 可得
$\langle\nabla_X Y, Z\rangle =$
$\frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle)$
$\boxed{\text{唯一性：}}$ 因为以上等式右边不依赖于联络。
$\boxed{\text{存在性：}}$ 局部表示：$g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle, \nabla_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$, 坐标基表示李括号为零。
$\Gamma_{ij}^l g_{lm} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$;
$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$
容易有以上公式构造黎曼联络。 □

测地线

测地线局部存在唯一定理。

Definition (指数映射EXP)

定义切向量集合$\epsilon = V \in T_pM$*,满足存在测地线*$r_V : [0,1] \to M$*,*$r'(0) = V$.
定义：指数映射$Exp : \epsilon \to M$*,*$Exp(V) = r_V(1)$.

任一点存在正规邻域，使得Exp是微分同胚。对应有正规坐标卡。

Definition (曲线长度)

光滑曲线$r : I \to M$*，定义* $L(r) = \int_a^b |r'(t)|dt$*为曲线的长度。*
给出流形上的一个距离函数:$d(x,y) = \min_r L(r) : r(0) = x, r(1) = y$.

- 任一黎曼流形由距离函数定义成为度量空间。
- 两点间最短曲线是测地线。
- 测地线是局部最短曲线。

曲率

流形的几何形状：

Definition (曲率张量)

定义: $R : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$, *满足*
$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$.
注意：有的书本定义为以上的负号。

Remark

- R*是*$(1,3)$*型张量。特别可以定义*$(0,4)$*型张量*$R(x,y,z,w) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle$*.称为黎曼曲率张量。*
- *截面曲率:*$sec(X,Y) = R(X,Y,X,Y)$*,完全决定黎曼曲率张量*
- *Ricci曲率：*$Ric(X) = \sum_{Y_j} sec(X, Y_j)$
- *数量曲率：*$Scal(p) = \sum_X Ric(X) = 2\sum_X \sum_Y sec(X,Y)$.

曲率决定流形的拓扑结构，黎曼几何的主要内容。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

April 20, 2009

Lecture 9: Differential forms and volume

积分与体积

Remark

- *积分的定义：* $I = \int_\Omega f(p)dV_p$;
  推广到流形： f, dv_p?
- *坐标变换：* $I = \int_{U=\psi^{-1}(\Omega)} f(\psi(y))d(\psi(V_y))$,
  推广到流形： $d(\psi(V_y)) = det\psi dV_y$?
- *行列式：反对称的n阶协变张量!*
- *线积分:* $\int_r \omega = \int_a^b r^*\omega = \int_a^b \omega(r'(t))dt$
- *线积分的参数化变换公式：* $\int_r \omega = \pm \int_{\hat{r}\omega}$
  积分方向 $\rightarrow$ *流形的定向!*

定义

给定n维线性空间V,其上的k阶协变张量是V上一个k重线性函数。记为$\mathcal{T}^k(V)$,它是线性空间，维数为n^k，基为$dx^{i1} \otimes \dots dx^{ik}$. $\mathcal{T}$是分次代数。

Definition (k-余向量)

定义线性空间V,其上的反对称的k阶协变张量为交替张量或k阶余向量；如果满足$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k)$.
线性空间V上的反对称k重线性函数又称为外形式(forms).记为$\Lambda^k(V)$.

记$\sigma \in S(k)$是k阶置换群的元素。$sgn(\sigma)$为置换奇偶。

Proposition (等价定义)

1. *T是反对称协变张量；*
2. *$T(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) = (sgn\sigma)T(X_1, \dots, X_k)$*
3. *任意两个自变量相同，则T的值为零。(或线性相关的自变量的张量值为0).*

交替张量的例子

EXAMPLE (低维)

$k=0$,数；
$k=1$,任一协变1阶张量；
$k=2$, $A(X,Y)=0.5(T(X,Y)-T(Y,X))$.

Definition (反对称算子)

定义$Alt: \mathcal{T}^k(V)\to\Lambda^k(V)$,
$Alt(T)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(sgn\sigma)T^\sigma$.

Proposition

$Alt(T)$是反对称的，且$Alt(T)=T$当且仅当T是反对称的。

外形式空间

记指标集$I=(i_1,\ldots,i_k)$,置换σ作用有$I_\sigma=(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)})$.

Definition (基本外形式)

给定V上基E_i,对偶基δ^i，定义k形式：$A^I(X_1,\ldots,X_k)=det(\delta^j(X_i))=detX$.
其中矩阵X_j^i为X_i在基E_j下的坐标. 称为k阶基本形式； 特别有$A^I=sgn(\sigma)A^{I_\sigma}$.
例如：R^3空间，$A^{13}(X,Y)=X^1Y^3-Y^1X^3$
$A^{123}(X,Y,Z)=det(X,Y,Z)$.

Theorem (外形式空间的基)

$\Lambda^k(V)$是一个(n,k)维的线性空间。其中基为A^I, I为递增的k指标集。特别$k>n$,$\Lambda^k(V)=0$。

证明

Proof.
A^I是线性无关；$\sum T_IA^I=0$,任意作用于一组子基E_{j_k},得到T_J=0;
A^I线性组合是满的。任意$T\in\Lambda^k(V)$, $T_I=T(E_{i_1},\ldots,E_{i_k})$. 可以证明 $T=T_IA^I$. □

Corollary

n次形式ω在线性变换下有
$\omega(BX_1,\ldots,BX_n)=detB\omega(X_1,\ldots,X_n)$.

微分形式的外积

张量积：$T\otimes S(X^i,Y^j)=T(X^i)S(Y^j)$, 局部表示$dx^i\otimes dy^j$；
对称张量:$ST=Sym(S\otimes T)$, $dudv=0.5(du\otimes dv+dv\otimes du)$

Definition (外积)

已知$\omega\in\Lambda^k(V)$,$\eta\in\Lambda^l(V)$ 定义外积 $\omega\wedge\eta=\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\omega\otimes\eta)$.

Proposition

给定基本形式A^I,A^J,$A^I\wedge A^J=A^{(I,J)}$.

$\boxed{\text{proof}}$ 记指标$P=(p_1,\ldots,p_{k+l})$,
验证：$A^I\wedge A^J(E_{p_1},\ldots,E_{p_{k+l}})=A^{(I,J)}(E_{p_1},\ldots,E_{p_{k+l}})$

1. 如果P包含不在I,J的指标，或者有重复指标，等式两边为零。
2. 如果$P=(I,J)$,右边为1.左边有
   $left=\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(A^I\otimes A^J)=\frac{1}{k!l!}\sum_\sigma sgn(\sigma)A^I(E_{\sigma i_k})A^J(E_{\sigma j_l})$
   $left=AltA^I(E_{i_k})AltA^J(E_{j_l})=1$.
3. 如果$P=\sigma(I,J)$,同上。

外代数

Proposition (外积的性质)

- 双线性
- 结合律 $\omega\wedge(\eta\wedge\xi)=(\omega\wedge\eta)\wedge\xi$
- 反交换律$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega$
- 基表示 $A^I=\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_k}$
  一般有$\omega_1\wedge\ldots\omega_k(X_1\ldots X_k)=det(W^i(X_k))$.

Theorem

定义$\Lambda^*(V)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^k(V)$,$\Lambda^*(V)$在外积下是一个反交换的分次代数。称为外代数。

可以有外积的其他定义：$\omega\wedge\eta=Alt(\omega\otimes\eta)$, 计算不方便。

微分形式

Definition (微分形式)

记$\Lambda^kM=\coprod_p\Lambda^k(T_pM)$为向量丛， 称其任一截面为一个k阶微分形式。所有微分形式记为$\mathcal{A}^k(M)$.
类似有$\mathcal{A}(M)=\bigoplus_k\mathcal{A}^k(M)$为一个外代数。
局部坐标表示$w=w_Idx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=\omega_Idx^I$

Proposition

光滑映射$F:M\to N$，诱导映射$F^*:\mathcal{A}(N)\to\mathcal{A}(M)$. 有

- F^*是线性的；
- $F^*(\omega\wedge\eta)=(F^*\omega)\wedge(F^*\eta)$
- 局部坐标$F^*(w_Idy^I)=\sum(\omega_I\circ F)d(Y^I\circ F)$
- n次形式的坐标变换$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$.

微分算子

Remark

- 恰当形式：$\omega=df$, $\int_r\omega=f(r(b))-f(r(a))$
- 必要条件$\frac{\partial w_i}{\partial x^j}=\frac{\partial w_j}{\partial x^i}$
- $d\omega=\sum(\frac{\partial w_i}{\partial x^j}-\frac{\partial w_j}{\partial x^i})dx^i\wedge dx^j=0$ 称为闭形式。
- 推广到任一形式？

外微分定义

Definition (外微分)

利用函数的微分算子df, 可以定义微分算子$d:\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k+1}(M)$，
$d\omega=d(\sum_I'\omega_Idx^I)=\sum_I'd\omega_I\wedge dx^I$.
称为外微分；$d\omega$称为外导数。

Theorem (外导数存在唯一)

任一光滑流形上存在唯一一个线性映射$d:\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k+1}(M)$，满足

1. 对光滑函数$df(X)=Xf$
2. 反导子：$\omega\in\mathcal{A}^k(M)$, $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\eta$
3. $d\circ d=0$.

.

特别它是局部算子$d(\omega_U)=(d\omega)_U$, 其局部坐标表示如上。

外微分存在性证明

Proof.
假设M有一个全局坐标卡。存在性：给出d的局部坐标定义如前。

- 线性易得；　且$d(fdx^I) = df \wedge dx^I$.
- 反导子:$\omega = fdx^I, \eta = gdx^J$,
  $d(\omega \wedge \eta) = d(fgdx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J$
- $d \circ d = 0$, 对f验证，任一$d(d\omega) = d(dw_I \wedge dx^I) = 0$.

唯一性：利用函数的微分定义的唯一性。
一般情形：局部坐标变换保证定义不变，构造全局外微分；
利用截断函数证明局部性；
再对任一局部张量场扩充为全局张量场，由局部唯一性可得全局唯一性。

□

例子与计算

EXAMPLE ($\mathcal{R}^3$外微分)
$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$;
$\eta = adx \wedge dy + bdy \wedge dz + cdz \wedge dx$

Proposition (自然性)
$G^*d\omega = d(G^*\omega)$

Proof: 微分形式不变性：

Proposition (1次形式求值(坐标无关))
$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$

Proof: $\omega = udv, d(udv)(X, Y) = XuYv - XvYu$.
可以推广到高阶。

内乘或缩并

Definition (内乘)
给定X,定义$i_X : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$,使得
$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_k)$.
又记为 $X \lrcorner \omega = i_X\omega$

Proposition (内乘性质)

- $i_X \circ i_X = 0$;
- $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X\eta)$.

Proof:
内乘平方为零易得。
后者：有一般行列式公式$det\mathbb{X} = \sum(-1)^{i-1}\omega^i(X_1)det(\mathbb{X}_1^i)$.
$X \lrcorner(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum(-1)^{i-1}\omega^i(X)(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \cdots \wedge \omega^k))$
特别$k = 2$公式可得。

李导数的对偶

李导数定义于切向量场：$[X, Y] \in \mathcal{T}(M)$.

Theorem
设E_i为光滑流形上的局部标架场，δ^i为对应的局部余标架场。设李导数满足 $[E_j, E_k] = c^i_{jk}E_i$, 对应有外导数$d\delta^i = -c^i_{jk}\delta^j \wedge \delta^k$.

Proposition (张量李导数)

- $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T)$
- $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\eta)$
- $\mathcal{L}_X(Y \lrcorner \omega) = (\mathcal{L}_X Y) \lrcorner \omega + Y \lrcorner (\mathcal{L}_X\omega)$

outline $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*((S\otimes T)_{\theta_t}) - (S\otimes T)_{\theta_0}}{t}$.

李导数的计算

Proposition (计算公式)

$\mathcal{L}_X(\omega(Y_1,\ldots,Y_k)) =$
$\mathcal{L}_X\omega(Y_1,\ldots,Y_k)+\sum_i \omega(Y_1,\ldots,\mathcal{L}_X Y_i,\ldots,Y_k)$
即 $\mathcal{L}_X\omega(Y_1,\ldots,Y_k) =$
$X(\omega(Y_1,\ldots,Y_k))-\sum_i \omega(Y_1,\ldots,\mathcal{L}_X Y_i,\ldots,Y_k)$

Corollary (微分与李导数交换)

$\mathcal{L}_X(df)=d(\mathcal{L}_X f)$

$\boxed{\text{proof:}}$ $\mathcal{L}_X(df)(Y)=YXf$

例子:$T=T_{ij}dx^i\otimes dx^j$,

$\mathcal{L}_Y T=(YT_{ij}+T_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+T_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j})dx^i\otimes dx^j$.

Cartan公式

Theorem (Cartan公式)

$\mathcal{L}_X\omega = X\lrcorner(d\omega)+d(X\lrcorner\omega)$

Corollary (外微分与李导数交换)

$\mathcal{L}_X(d\omega)=d(\mathcal{L}_X\omega)$

$\boxed{\text{Proof:}}$$\mathcal{L}_X(d\omega)=d(X\lrcorner d\omega)$;

$\boxed{\text{定理证明：}}$ 递推法。
0维形式，$X\lrcorner(df)+d(X\lrcorner f)=Xf$
1维形式，$\omega=udv$,$\mathcal{L}_X(udv)=(Xu)dv+ud(Xv)$
利用反导子性质，对高阶递推可得。
$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\omega)=(\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\omega+\alpha\wedge(\mathcal{L}_X\omega)$

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

April 24, 2009

Lecture 10: Orientation and integration

积分与带号体积

Remark

- *积分的定义：* $I = \int_{\Omega} f(p)dV_p$;
  推广到流形： f, dv_p?
- dv_p*是反对称的*n*阶协变张量，即*n*形式。但是坐标变换下*det*有正负号!*
- *解决方法：取绝对值 或者 给出流形一个正负号!*
- *线积分的参数化变换公式：* $\int_r \omega = \pm \int_{\hat{r}} \omega$
  积分方向 $\rightarrow$ *流形的定向!*

向量空间的方向

R^1,R^2,R^3的方向

Definition (向量空间的定向)

给定线性空间V*，称任一组有序基*E_i*和另一组有序基*E_i*是定向相容的如果它们的基变换矩阵的行列式大于零。*
定向相容的有序基只有两类。称为向量空间的两个定向。
指定了一类基称其为有向空间，对应的基称为正向基.(反之反向基）。

R^0，R^1,R^2,R^3的定向。

Proposition (等价定义)

给定向量空间V*和其上一个非零*n*形式*Ω*，任意有序基*E_i*，满足*$\Omega(E_1,\ldots,E_n) > 0$*，给出了*$V$*的一个定向。*

$\boxed{\text{proof:}}$ 基变换对应的n形式公式$\Omega(e^1,\ldots,e^n) = detB\Omega(E_1,\ldots,E_n)$.
$e^1 \wedge \ldots e^n$给出了R^n的标准定向。

流形的方向

任一点T_pM可以给出逐点的定向。

Definition (流形的定向)

正向局部标架场E_i：如果任一点$p\in U$, $E_i(p)$在T_pM给出正定向.
给出了切空间定向的连续延拓,对应坐标卡称为正向坐标卡。
流形的定向：如果给定逐点定向的流形，在每一点邻域存在一个正向的局部标架场。
给定一个定向的流形是有向流形。流形可定向或不可定向。

定向相容的坐标卡：即坐标卡间过渡函数的Jacobi行列式为正。

Proposition (等价定义)

给定流形M，如果其上存在一族定向相容的坐标卡覆盖M,则M可定向，且指定坐标卡为正向给出了一个流形的定向。 反之，命题也成立。

proof: 由于定向相容性，任一点的切空间可以给出逐点定向；局部标架场存在给出了连续的延拓；由坐标卡覆盖给出流形的一个定向。
反之，由局部标架场构造坐标卡，易证其是定向相容的。

定向流形的判定

Proposition (非零微分形式)

M是可定向的当且仅当M上存在一个非零的n次微分形式Ω。
称为定向形式，特别称$\Omega>0$为正向的.

proof: 设$\Omega\neq 0$，可以给出一个逐点定向。任一坐标卡U, 有$\Omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, U连通，看到$f>0$或$f<0$;前者取坐标标架场；后者令$x^1\to -x^1$,同样得到正向的标架场，从而M可以定向。
反之，构造一个全局的n形式；(局部存在);

Corollary

任意定向流形的开子流形可定向；定向流形的乘积流形可定向。

Proposition (平行化流形)

流形存在全局坐标卡称为可以平行化流形。它们必然可以定向。

proof: 由全局标架场给出定向。

定向流形的例子

EXAMPLE (平行化流形)

R^n,T^n,S^1,S^3
李群：都可平行化。

不可定向流形：Mobius 带。

Theorem

任一连通不可定向流形存在可定向的覆盖流形(两重覆盖).

Definition (保定向映射)

M,N是定向光滑流形，光滑映射$F:M\to N$是保定向的如果 任一p, F_*将T_pM的正向基映射到$T_{F(p)}N$的正向基。
F是局部同胚才有定义。如果映射到负向基称为反定向映射。

$F:M\to N$是保定向的当且仅当F的Jacobi行列式为正。

子流形的定向

Definition (沿子流形的向量场)

给定S是M的浸入子流形，定义：连续映射$N:S\to TM$,满足$N(p)\in T_pM$, 称为沿S的向量场。
特别称N与S是横截的，如果N_p和T_pS线性无关。

Theorem (超曲面的定向)

M是n维可定向光滑流形，S为超曲面，N为沿S的横截向量场。则S存在唯一定向使得$(E_1,\ldots,E_{n-1})$为正向基当且仅当$(N_p,E_1,\ldots,E_{n-1})$为T_pM的正向基。
Ω为M的定向形式，则$(N\lrcorner\Omega)|_S$是S的定向形式。

proof: 仅需证明$\omega=(N\lrcorner\Omega)|_S$是定向形式， 即非零。
S^n可以定向，记$N=x^i\partial/\partial x^i$.称为标准定向。一般的正则水平集可以定向。

带边流形的边界向量场

Remark (Review)

带边流形:局部坐标卡同胚与$H^n:\{(x^1,\dots,x^n):x^n\geq 0\}$开子集。边界是$n-1$维嵌入子流形。局部坐标$\phi(p)=(x_1,\dots,x_{n-1},0)$.

Definition (内向向量场)

向量场N沿∂M的内向向量场，如果每一点p附近存在曲线，使得$r(0)=p,r'(0)=N_p$,且$N_p\notin T_p(\partial M)$.
$-N$称为沿∂M的外向向量场。

Proposition (判定)

- *内向向量场在局部坐标的表示$N_p=X^i\partial x^i$满足$X^n>0$.*
- *任一光滑带边流形存在沿∂M的外向向量场。*

proof: 从局部构造：$N=-X^n\partial x^n$到流形。

带边流形的定向

Theorem (边界的诱导定向)

给定带边流形M,如果M可定向，则∂M可定向，其诱导定向由外向向量场决定。又称为Stokes定向。

proof: 给定Ω,$N\lrcorner\Omega$诱导边界的定向。
注记：它与外向向量场选取无关。

EXAMPLE

S^n作为B^n的边界可定向，且与标准定向相同。
R^{n-1}作为H^n的边界可定向，
$N=-X^n\partial x^n$, $\Omega=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$,
$N\lrcorner\Omega=(-1)^{n-1}dx^n(N)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$
仅当n为偶数时，与标准定向相同。

注记：一般如果边界的局部坐标卡可以扩充到流形上，其坐标映射是保定向的当且仅当 看成是保定向的。

定向黎曼流形

Theorem (黎曼体积形式)

如果(M,g)可定向，存在唯一定向形式满足$\Omega(E_1,\dots,E_n)=1$,对任一正交标架场。
称为黎曼体积形式，记为dV_g.
局部坐标$dV_g=\sqrt{det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$.

proof: $\Omega=e^1\wedge\cdots\wedge e^n$.
一般基变换$\partial x^i=AE^i$, 有$det(g_{ij})=(detA)^2$,
$dV_g=detA\partial x^1\wedge\cdots\wedge\partial x^n$.

Theorem (带边黎曼流形)

任一带边黎曼流形存在唯一一个沿∂M的单位外向法向量场N,
即$<N_p,T_p(\partial M)>=0$。
可定向带边黎曼流形的边界诱导定向有$d\tilde{V}_g=(N\lrcorner dV_g)|_{\partial M}$.

proof: 局部存在，唯一。且是正交基，所以单位体积形式。

欧氏空间的积分

Remark (多重黎曼积分)

定义：$I:D\to R,I=\int_D fdV$
判定：f有界且几乎处处连续。
特别：有界连续函数在有界积分域D上可积，如果∂D测度为零。称为可积区域。

Definition (微分形式的积分)

给定可积区域$D\subset R^n$, 任一n形式$\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 可以定义积分 $\int_D\omega=\int_D fdv=\int_D fdx^1\dots dx^n$.

- 给定一个开集U上有紧致支集的n形式：可以定义一个可积区域；$K\subset D\subset U$
- 积分$\int_U\omega=\int_D\omega$且与$D$的选取无关；
- 类似可以定义H^n上的开集积分$\int_V\omega=\int_{D\cap H^n}\omega$; 还可定义广义积分(无界区域).

流形上的积分

Proposition

给定D, E是可积区域；任一$G: D \to E$为光滑映射， 且限制在$Int(D) \to Int(E)$上是保定向的微分同胚，则 $\int_E \omega = \int_D G^*\omega$ (反定向同胚加负号；) 特别有微分同胚保持积分不变。任两个开集保定向微分同胚，则$\int_V \omega = \int_U G^*\omega$

proof: $\int_E \omega = \int_D (f \circ G)|det(DG)|dV$ 微分同胚保持边界和零测度集。

Definition (流形上的局部积分)

设有向流形上ω的紧致支集包含于一个正向坐标卡(U, ϕ), 定义 $\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega$.

以上定义与正向坐标卡选取无关；
类似可以定义到带边流形的坐标卡上；

流形上的积分

Definition (流形上的积分)

设(U_i, ϕ_i)覆盖$supp\omega$, ψ_i为对应的单位分解；定义ω的积分$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i\omega$.

Proposition (well-defined)

以上定义与坐标卡或单位分解的选取无关。

Proof.
设$(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$另一组覆盖，$\tilde{\psi}_i$另一组单位分解；
$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i\omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j\psi_i\omega$ □
零维流形：$\int_M f = \sum_p \pm f(p)$.

积分的属性

Proposition

1. 线性;$\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$
2. 定向反向：设$\bar{M}$是M赋予相反的定向，$\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$
3. 非负性:设ω是正向n形式，$\int_M \omega > 0$
4. 微分同胚不变：$F: N \to M$保定向同胚，$\int_M \omega = \int_N F^*M$

Proof.

1. 微分形式的线性；
2. 反向微分同胚的结果；
3. 单位分解+局部正；
4. 利用单位分解, $\omega = \sum \psi_i\omega$;
   在局部坐标卡$(F^{-1}(U), \phi \circ F)$上验证积分相等；

□

积分的计算

Proposition

*令可定向流形$M = \cup E_i$, E_i可积区域，仅在边界相交； 设存在局部参数化表示$F_i: D_i \to M$，满足 $F(D_i) = E_i$,在内部为保定向同胚，
则 $\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^*\omega$.*

Outline: 设ω包含于一个坐标卡(U, ϕ).
$A_i = \bar{U} \cap E_i$, $B_i = F_i^{-1}(A_i)$,$C_i = \phi(A_i)$
$\int_M \omega = \sum_i \int_{C_i} (\phi^{-1})^*\omega = \sum_i \int_{B_i} F_i^*\omega$

例子： 给定$R^3 \backslash \{0\}$上2-形式
$\Omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.
取球面坐标表示(ϕ, θ),球面由两个坐标卡覆盖。$D_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$,$D_2 = [0, \pi] \times [\pi, 2\pi]$. 利用局部坐标卡直接计算单位球面上的积分$\int_{S^2(1)} \Omega = 4\pi$;

Stokes定理

Theorem
M是n维光滑定向带边流形，ω是紧致支集的$n-1$形式，
$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Proof.
设结果在$M = H^n$时成立(待证)；
如果ω位于一个坐标卡内，
$\int_M d\omega = \int_{H^n} (\phi^{-1})^* d\omega = \int_{H^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)$
右边对应于$\int_{\partial H^n} \left((\phi^{-1})^*\omega\right) = \int_{\partial M} \omega$，因为$\phi$保边界的定向；
如果ω不是位于一个坐标卡内，
$\int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega = \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) = \int_M d\omega$

□

H^n上Stokes定理的证明

Proof.
不妨设积分区域为长方形$A = [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$.
$\omega = \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n = \omega_i dV^i$;
$d\omega = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dV$
$\int_{H^n} d\omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dV^n$
$\int_{\partial H^n} \omega = \sum \int_{A \cap \partial H^n} \omega_i d\hat{V}^i$
$dx^n|_{\partial H^n} = 0, \int_{\partial H^n} \omega = \int_{A \cap \partial H^n} \omega_n d\hat{V}^n$
$d\hat{V}^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$,其定向和(Stokes)诱导定向差$(-1)^n$; 有
$\int_{\partial H^n} \omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dV^n$.

□

积分定理的推广

Remark
一维Stokes 定理：线积分$\int_r df = f(r(b)) - f(r(a))$
二维Green定理：$\int_D (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial})dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$
无边流形或恰当形式：$\int_M d\omega = 0$
黎曼流形：

Remark (积分推广)

- *任意不可定向流形:*
  定义:density密度$\mu : V \times \cdots \times V \to R$,满足$\mu(x_1, \ldots, x_n) = |\omega(x_1, \ldots, x_n)|$, ω是n形式。可定义积分；
- *光滑流形带角; 如正方形，三角形。*
  要定义带角光滑结构，分段积分，同样有Stokes 定理。

De Rham上同调群

Definition
给定光滑流形M,$d_p : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M)$是线性映射
$\mathcal{Z}^p(M) = \ker d_p$，即$M$上$p$阶闭形式；
$\mathcal{B}^p(M) = Im(d_{p-1})$,即$M$上$p$阶恰当形式；
De Rham上同调群(空间) $\mathcal{H}^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$

Theorem (同伦不变)
如果M, N同伦，则$\mathcal{H}^p(M) = \mathcal{H}^p(N)$。
特别它们是拓扑同胚不变量。

Theorem (de Rham 定理)
$\mathcal{H}^p(M)$和流形作为拓扑空间的上同调群同构。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

April 29, 2009

Lecture 11: Differential Operators

向量场的积分？

Remark

- *流形上的积分定义：* $\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega$
  $\int_E \omega = \int_D G^* \omega$
- *光滑函数，向量场的积分？*
- *Stokes定理:* $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.
- *向量场的外微分？*
- *黎曼流形的度量诱导向量场和微分形式的对偶。*
  $\longrightarrow$ *构造微分算子!*

黎曼流形

- 设(M, g)是n维可定向流形
- 度量诱导同构：$g^\flat : TM \to T^*M$, $g^\flat(X)(Y) = g(X, Y)$，记为$X^\flat$.
  $g_\sharp(X^\flat) = X$
- (唯一)黎曼体积形式：$dV_g = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$
- 可定向带边黎曼流形的边界诱导定向有
  $d\tilde{V}_g = (N \lrcorner dV_g)|_{\partial M}$.

散度

Definition (Hodge星算子)

可定向带边黎曼流形定义线性(同构)映射: $*: C^\infty(M) \to \mathcal{A}^n(M)$,
$*f = fdV_g$
可以定义函数的积分$\int_M f \cong \int_M *f = \int_M fdV_g$.

Definition (散度)

定义:$\mathrm{div}: \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, $\mathrm{div}\, X = *^{-1}d(X \lrcorner dV_g)$,
即$d(X \lrcorner dV_g) = (\mathrm{div}\, X)dV_g$

几何意义: $\mathcal{L}_X dV_g = X \lrcorner d(dV_g) + d(X \lrcorner dV_g) = \mathrm{div}\, X dV_g$
向量场生成的流θ_t对积分区域体积$Vol(\theta_t(D))$的变化率是$\mathrm{div}\, X$
局部坐标: $\mathrm{div}(X^i \partial x_i) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})$

散度定理

Theorem (黎曼流形散度定理)

(M, g)*上任一紧致支集的向量场*X*，有*
$\int_M (\mathrm{div}\, X)dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle d\tilde{V}_g$

Proof.
利用Stokes 定理;
$\int_M (\mathrm{div}\, x)dV_g = \int_M d(X \lrcorner dV_g) = \int_{\partial M} X \lrcorner dV_g$
黎曼超曲面上有$X \lrcorner dV_g = \langle X, N\rangle d\tilde{V}_g$
$\boxed{\text{outline:}}$ $X = \langle X, N\rangle N + X^T$,
$X^T \lrcorner dV_g(X_1, \ldots, X_{n-1}) = dV_g(X^T, X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$ □

曲面积分

$n = 3$维黎曼流形
构造线性(同构)映射:$\beta: \mathcal{T}(M) \to \mathcal{A}^2(M)$, $\beta X = X \lrcorner dV_g$

Definition (旋度)

定义:$\mathrm{curl}: \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$, $\mathrm{curl}\, X = \beta^{-1}d(X^\flat)$,
即$\mathrm{curl}\, X \lrcorner dV_g = d(X^\flat)$

Definition (曲面向量场积分)

S*为紧致的二维嵌入子流形，令*$dA = N \lrcorner dV_g$*;*
定义:$\int_S X \cong \int_S \langle X, N\rangle dA$

曲面积分的Stokes定理

Theorem

$\int_S \langle \mathrm{curl}\, X, N\rangle dA = \int_{\partial S} \langle X, T\rangle ds$
其中N*是外法向量场，*ds*为*S*的边界的体积形式；* T*为*S*边界上的单位正向切向量场。*

Proof.
利用Stokes定理有： $\int_S d(X^\flat) = \int_{\partial S} X^b$
$\mathrm{curl}\, X \lrcorner dV_g = d(X^\flat)$
$X^\flat|_{\partial S} = \langle X, T\rangle ds$
后面方程由$X^\flat = fds, ds(T) = 1$;
$f = fds(T) = X^\flat(T) = \langle X, T\rangle$

□

三维黎曼流形的微分算子

交换图表：

$$\begin{tikzcd} C^\infty(M) \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{T}(M) \arrow[r, "\text{curl}"] \arrow[d, "\flat"'] & \mathcal{T}(M) \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "\beta"'] & C^\infty(M) \arrow[d, "*"'] \\ \mathcal{A}^0(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^1(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^2(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^3(M) \end{tikzcd}$$

Corollary

$\text{curl} \circ \text{grad} = 0, \text{div} \circ \text{curl} = 0$

拉普拉斯算子：$\triangle f = \pm \text{div} \circ \text{grad}\, f$
如果取负号与Laplace-Beltrami(Hodge定义)相同
局部坐标:$\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial f}{\partial x^j})$

Hodge星算子

Definition (Hodge 对偶)

给定线性内积空间V，一个n形式$\omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$; 定义线性同构:
$* : A^k(V) \to A^{n-k}(V)$, $*(e^1 \wedge \cdots \wedge e^k) = e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$.

Proposition

- *诱导内积表示* $\langle \xi, \eta \rangle \omega = \xi \wedge *\eta$
- *对偶*$* \circ *\eta = (-1)^{k(n-k)}\eta$
- *内积同构* $\langle \xi, \eta \rangle = \langle *\xi, *\eta \rangle$

Proposition (黎曼流形)

- *内积*$\int_M \langle \xi, \eta \rangle dV_g = \int_M \xi \wedge *\eta$
- $*dV_g = 1, *1 = dV_g$
- $\text{div}\, X = *d * X^\flat$

调和算子

Definition (余外微分)

定义：$\delta : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$,
$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d*$

有$\delta \circ \delta = 0$,
内积共轭 $\langle d\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \delta\xi \rangle$

Definition (调和算子)

定义Laplace-Beltrami：$\triangle : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^k(M), \triangle = d\delta + \delta d$

Remark

$\triangle f = -\text{div}\,\text{grad}\, f$*在0形式上与前面定义一致；*
$\triangle\omega = 0$*称为调和形式；*
Hodge 定理：(de Rham)上同调群的元素由调和形式唯一确定。

流形上微积分的基本定理

Theorem (四个基本定理)

1. *逆函数定理：给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p切映射F_*为双射，则存在邻域$p \in U, F(p) \in V$,使得$F|U : U \to V$是微分同胚。称为局部微分同胚。*
2. *Stokes 定理：*$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.
3. *ODE存在唯一定理：任一光滑向量场Y，存在唯一的极大局部流$\theta : D \subset R \times M \to M$,它的无穷小生成元是$Y$,且*
   - θ^p*是唯一极大积分曲线*
   - θ_t*是*$M_t = (p : (t,p) \in D)$*上的微分同胚。*
   - $(\theta_t)_* Y(p) = Y(\theta_t(p))$, *称$Y$是关于$\theta$不变的。*
4. *线性PDE存在唯一定理(Frobenius定理)：设L是M上的k维光滑分布(每一点是切空间的子空间)；如果它关于Lie括号封闭$[X,Y] \in L$,则存在一个积分流形它的分布是L.*
   记$L = span(\partial y_1, \ldots, \partial y_k)$.

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

May 11, 2009

Lecture 12: Lie Groups

历史注记

- Sophus Lie(1842-1899)
- 目的：推广代数方程的伽罗瓦表示理论(置换群)到微分方程的连续变换群；
  离散对称 $\longrightarrow$ 连续对称
- 李群：微积分+群乘法
- 局部生成群(代数结构)：李代数分类
  Chevalley：代数群
- 李群作用于流形：

李群的定义

Definition (李群)

G是一个非空集合；满足

1. *G是一个乘法群；*
2. *G是一个n维光滑流形；*
3. *群运算是光滑映射。即乘法运算 $m: G\times G\to G, m(g,h)=gh$， 逆运算$i: G\to G, i(g)=g^{-1}$ 都是光滑映射。*

称G是n维李群。e为单位元。

等价代替：$P: G\times G\to G, p(g,h)=gh^{-1}$光滑映射；

EXAMPLE

- *$(R^n,+)$,n维交换李群。*
- *$(GL(n,R),\cdot)$，n^2维李群;可以看成n维线性空间的自同构群。$GL(V)$*

注记：拓扑群必然存在解析结构，从而可以看成李群。

例子

Proposition (构造)

- 李群的直积是李群:$G = G_1 \times G_2$
- 李群的含单位元的连通分支是李群。

$\boxed{\text{Outline:}}$ G_0是连通分支，是开子流形；验证群运算是封闭的。

EXAMPLE (更多例子)

- 0维李群称为离散群：有限或可数元素的群+离散拓扑。
- $R^* = R - \{0\}$是个乘法一维李群；有两个分支。R^+是李群；
  类似有C^*二维李群;
- C^*的单位模集合是S^1：一维交换李群，进一步
  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$是$n$维环群；
- 推广：$H = C \times C, Q = H \times H$对应四元数，八元数的单位模是李群$S^3, S^7$.

李群同态

Definition
给定李群G, H，映射$F : G \to H$既是群同态又是光滑映射，称F为李群同态。
特别如果F是微分同胚，称G和H是李群同构。

EXAMPLE

- 嵌入$i : S^1 \to C^*$;
- 指数映射:$exp : R \to R^*, exp(t) = e^t$;
  $exp : C \to C^*$, $\epsilon : R \to S^1, \epsilon(t) = e^{2\pi it}$.
- 行列式$\det : GL(n, R) \to R^*$, $\det(AB) = \det A \det B$.
- 自同构:$Aut_g : G \to G, Aut_g(h) = ghg^{-1}$.

Lie 代数

Proposition (移动同胚)
给定G，任一元素g，定义:$L_g : G \to G, L_g(h) = gh$,
$R_g : G \to G, R_g(h) = hg$，相应的称为左，右移动。
它们是微分同胚！特别任意两点p, q,存在微分同胚映射p到q.
微分同胚诱导切空间同胚。

Definition (左不变向量场)
定义:$X \in \mathcal{T}(G)$满足；
$(L_g)_* X_h = X_{gh}$，$(L_g)_* X = X$

Proposition
李群的所有左不变向量场是一个李代数。即$\mathcal{T}(G)$的一个线性子空间，且对李括号密闭。记为$Lie(G)$.

$\boxed{\text{proof:}}$ 线性显然；对李括号
有$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$

李群的李代数即单位元切空间

Theorem (同构定理)
定义映射$F : Lie(G) \to T_e(G), F(X) = X_e$是线性同构，
即$Lie(G)$是n维线性空间。

Proof.

- 给定向量$V \in T_e(G)$，定义左不变向量场 $\tilde{V}_g = (L_g)_* V$.
  验证光滑性：任意f，$\tilde{V}(f)$光滑；
  $\tilde{V}(f)(g) = \tilde{V}_g(f) = ((L_g)_* V)f = V(f \circ g) = r'(0)(f \circ g)$
  左不变：$(L_h)_* \tilde{V}_g = (L_h)_*(L_g)_* V = (L_{hg})_* V = \tilde{V}_{hg}$.
- 同构：构造逆映射$\tau : V \to \tilde{V}$.
  验证其为逆。$\tau \circ F(X)|_g = \tau(X_e)|_g = \tilde{X}_e|_g = (L_g)_* X_e = X_g$
  $F(\tau(V)) = F(\tilde{V}) = (\tilde{V})_e = (L_e)_* V = V$

□

李代数例子

EXAMPLE

- R^n, $Lie(R^n) = R^n$左移动:$L_b x = b + x$, 左不变向量场$V^i\partial/\partial x^i$仅当V_i为常数；同时它是交换的。
- S^1，$Lie(S^1) = R^1$,左移动:$L_b\theta = b + \theta$, $d/d\theta$是左不变向量场。
- $Lie(GL(n, R)) = gl(n, R)$,其中$gl(n, R)$是矩阵以$[A, B] = AB - BA$为李代数的线性空间。

定义:李代数同态：线性映射$A : g \to h$满足$A([X, Y]) = [A(X), A(Y)]$.

Theorem (诱导李代数同态)

给定李群及其李代数$G, H, Lie(G), Lie(H)$;如果$F : G \to H$是李群同态，则 $F_* : Lie(G) \to Lie(H)$是李代数同态。特别同构的李群有同构的李代数。

$\boxed{\text{Outline:}}$ 构造F相关向量场$Y, Y_e = F_*X_e$. 利用$F \circ L_g = (L_{F(g)} \circ F$.

全局标架场

Proposition

李群存在一个全局标架场。即由$T_e(G)$的n个线性无关向量生成的左不变向量场组成。

Corollary

设李群G的标架场为$\{X_i\}$,则任一左不变向量场是$\{X_i\}$的常系数线性组合。

$\boxed{\text{Proof:}}$ 设左不变$X = a^iX_i$;
$X(g) = (L_g)_*(X(e)) = a^i(e)(L_g)_*(X_i(e)) = a^i(e)X_i(g)$,即系数不变。

Corollary (结构常数)

设李群G的标架场为$\{X_i\}$,则存在常数C_{ij}^k,满足$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$. 称为李群的结构常数。且满足张量变换规律。

李群的积分

Remark

李群是可定向流形。由全局标架场决定。

Theorem (Harr积分)

任一紧致李群存在唯一一个左不变的定向形式Ω, 满足$\int_G \Omega = 1$

Proof.

设E_i为左不变标架场； 不妨设其为正向的标架场。
对偶余标架场为δ^i, 令$\Omega = \delta^1 \wedge \cdots \wedge \delta^n$,
其为左不变的。特别G紧致，$\int_G \Omega = c$有限数,令 $\Omega_0 = \Omega/c$,可得$\int_G \Omega_0 = 1$. □
称其为Harr体积形式，类似可定义函数的Harr积分。

左不变向量场与流

Definition (Integral curves)

给定光滑曲线$r : I \to M$，流形上光滑切向量场$Y : M \to TM$，称r是Y的一条积分曲线，如果$r'(t) = Y(r(t)), t \in I$.

Definition (Global flow)

给定M上光滑切向量场Y,任一点存在唯一一个积分曲线$\theta^p : R \to M$. $\theta'(t) = Y(\theta^p(t))$.
定义：$\theta_t : M \to M; \theta_t(p) = \theta^p(t)$, 给出$M$的一个同胚。

Proposition

左移动和流可以交换：$L_g \circ \theta_t = \theta_t \circ L_g$

$\boxed{\text{Outline:}}$ $(L_g)_*X_{\theta_t} = X_{L_g\theta_t}$

左不变向量场对应的全局流

Proposition

李群G的任一左不变向量场$X \in Lie(G)$存在全局流θ。 特别每个积分曲线定义在直线上。

Proof.

- 给定$g \in G$，假设θ_g的极大积分曲线定义于(a,b), 不妨设$b < \infty$， 推导矛盾!
- 定义单位元e的局部流θ^e定义于$(-\delta,\delta)$.设$c > b-\delta$, 利用左移动构造新的积分曲线: $r(t):(a,c+\delta) \to G$,
$$r(t) = \begin{cases} \theta^g(t) & t \in (a,b) \\ L_{\theta^g(c)}\theta^e(t-c) & t \in (c-\delta, c+\delta) \end{cases}$$
- well-defined: 左移动和流交换。
- $r(t)$是积分曲线。$t \in (c-\delta, c+\delta)$, $r'(t) = (L_{\theta^g(c)})_* X_{\theta^e(t-c)} = X_{r(t)}$ 矛盾!

□

单参数子群

Definition (单参数子群)

$F: R \to G$是李群同态，称其为一个单参数子群， 特别它的像是一个李子群。

例子: 左不变向量场生成的θ^e. $\theta^e(s)\theta^e(t) = \theta^e(s+t)$

Theorem

李群的所有单参数子群集合与其李代数$Lie(G)$及T_eG一一对应。即任一单参数子群由T_eG上的切向量生成的左不变向量场决定。

Proof.

给定$F: R \to G$,定义$X = F_*(d/dt)$.
由李群诱导的李代数同态 $F_*(d/dt) \in Lie(G)$,d/dt看作R上的左不变向量场。
F是X的积分曲线，$F'(t_0) = F_*(d/dt)|_{t=t_0} = X_{t_0}$. □

指数映射

EXAMPLE (指数函数)

$exp: R \to R^*, exp(t) = e^t$;
$\epsilon: R \to C^*, \epsilon(t) = e^{2\pi i t}$.

EXAMPLE (一般线性群)

$exp: R \to GL(n,R), exp(tA) = e^{tA} = \sum \frac{t^n A^n}{n!}$;
其中$A \in gl(n,R)$.
验证:级数收敛，满足积分方程$F'(t) = F(t)A$, 光滑； e^{tA}*可逆.*

Definition

定义:$\exp: Lie(G) \to G$*, 任一$X \in Lie(G)$,θ^e是X生成的单参数子群， 有*
$\exp(X) = \theta^e(1)$.

Remark: exp是光滑映射。利用ODE的结果。

指数映射的性质

Proposition (生成单参数子群)

固定X, 令$F: R \to G, F(t) = \exp(tX)$,
则F是一个单参数子群。 特别有$\exp(s+t)X = \exp sX \exp tX$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ $\exp tX = \theta^e_{tX}(1) = \theta^e_X(t)$

Proposition (局部微分同胚)

指数映射诱导映射$\exp_*: T_e(T_e(G)) \to T_eG$是等同映射$Id$，特别$exp: T_eG \to G$是局部微分同胚。

$\boxed{\text{Proof:}}$任给X,定义光滑曲线$r: R \to T_eG, r(t) = tX$,
$\exp_* X = \exp_* r'(0) = (\exp \circ r)'(0) = \frac{d}{dt}\exp(tX) = X$.
特别有逆函数定理，得到局部微分同胚。

指数映射的性质

Proposition (左不变向量场的流)

任给 $X \in Lie(G)$,θ是其生成的流，有$\theta_t = R_{\exp(tX)}$

$\boxed{\text{proof:}}$ $R_{\exp(tX)}(g) = g \exp tX = L_g(\exp tX) = L_g(\theta_t(e)) = (\theta_t)L_g e = \theta_t g$

Proposition (交换图表)

任意$F : G \to H$, 有$F_* : T_eG \to T_eH$, $\exp \circ F_* = F \circ \exp$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ $\exp(tF_*X) = F(\exp tX)$

定义

Definition (李群的表示)

设V是n维向量空间(或复空间), 线性同构群$GL(V) \cong GL(n, R)(GL(n, C)$. 任一李群同态:$\rho : G \to GL(V)$,称为 G的一个表示(或复表示). V为表示空间。

Definition (李代数的表示)

设V是n维向量空间(或复空间), 李代数$gl(V) \cong gl(n, R)(gl(n, C)$. 任一李代数同态$\tau : \eth \to gl(V)$称为李代数的一个表示。

Definition (伴随表示)

李群同构：$ad_g : G \to G, ad_g(h) = ghg^{-1}$. 特别$(ad_g)_* : T_eG \to T_eG$,可以看成向量空间的线性同构$GL(T_eG)$, 称$Ad : G \to GL(T_eG)$为李群$G$的伴随表示。

伴随表示

Theorem

$Ad : G \to GL(T_eG)$为李群同态。

$\boxed{\text{Outline:}}$ Ad是群同态。由切映射的复合。
Ad是光滑的。由乘法的光滑性。

Definition (李代数的伴随表示)

记李群同态$Ad : G \to GL(T_eG)$诱导的李代数同态为$ad : T_e(G) \to gl(T_eG)$.

Proposition

- $ad(X)Y = [X, Y]$;
- $Ad(\exp(X)) = \exp(ad(X))$

主要结果

Theorem (闭子群)

任一李群G的闭子群是它的李子群。

Theorem (子代数对应子群)

设$\tilde{h}$为T_eG的李子代数，存在唯一的连通子群$H < G$的李代数为$\tilde{h}$.

Theorem (Sophus Lie基本定理)

单连通的李群同构当且仅当题目有同构的李代数。

Theorem (Ado定理)

每个有限维李代数存在一个忠实的有限维表示。

Theorem (李群和李代数的一一对应)

对于单连通的李群，李群同构的等价类和有限维李代数同构的等价类一一对应。

微分流形

Calculus on Differential Manifolds

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, Beihang University

May 15, 2009

Lecture 13: Lie Transformation Groups

群作用

Definition (群作用)

设G是一个群，M是一个集合，定义群G(左)作用在M上为一个映射$\rho : G \times M \to M$, 记为$\rho(g,p) = g \cdot p$, 满足

- *复合作用* $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p$
- *单位作用* $e \cdot p = p$

Remark

- *类似可以定义右作用。*
  且右作用与左作用一一对应。$g \cdot p \cong p \cdot g^{-1}$
- *一般记*$g \cdot p = \rho_g(p)$,ρ_g*是集合M到自身的一个映射。*
  容易说明$\rho_g \in S(M)$, $S(M)$*是M的置换群。*
  且$\rho : G \to S(M), g \to \rho_g$*是一个群同态。*

群作用例子

Remark

- *固定p,称*$T = \{g \cdot p; g \in G\}$*为群作用的一个轨道;*
- *稳定化子(isotropy group迷向群):*$G_p = \{g : g \cdot p = p\}$.

EXAMPLE

子群H作用在群G上，$\rho : H \times G \to G : \rho(h,g) = hg$*,群作用即群的乘法。*
轨道:右陪集Hg
特别H是正规子群，陪集有群结构，记为G/H：商群。

李群作用于光滑流形

Definition (李群作用)

G是一个李群；M是一个光滑流形，定义李群G(左)作用在M上即是一个群作用，又是一个光滑映射。
称带G作用的流形M称为一个G空间。一般记为$\theta : G \times M \to M$

Proposition

θ_g是微分同胚, $\theta : G \to Diff(M)$是一个群同态。

Definition

- *群作用是可迁的transitive； 如果任意p, q，存在$g \cdot p = q$.即只有一个轨道。*
- *群作用是自由的(无不动点)；如果只有单位元满足$gp = p$,即任一点的迷向群是平凡的。$G_p = e$.*

例子

EXAMPLE (基本例子)

- *R作用于M: 单参数变换*
  群$\theta : R \times M \to M, \theta^t\theta^s(p) = \theta^{s+t}(p)$;
  固定p，是一条积分曲线；
- *$G = GL(n)$作用于向量空间V， $\rho : G \times V \to V, \rho_A(v) = Av$.*
  有两个轨道$0, V - \{0\}$.
- *G作用到自身：左移动，右移动L_g, R_g, 作用是自由，可迁的；*
  内自同构:$C_h \cdot g = hgh^{-1}$;

EXAMPLE (更多例子)

- *平凡作用:$\theta_g(p) = p$,即$G_p = G$.*
- *李群表示:$\rho : G \to GL(V)$,*
  定义线性作用$\rho : G \times V \to V, gv = \rho(g)v$.
- *正交变换群$O(n)$作用于R^n;*
  轨道:原点，所有圆周；

单参数变换群

给定李群G作用于M, 任一$X \in T_eG$,指数映射得到单参数子群$\theta_X(t) = exp(tX)$诱导：
一个单参数变换群作用于M, $\theta : R \times M \to M$.
X对应有左不变向量场，任一点p, 存在积分曲线$r(t) = \theta_X(t, p)$，定义 $\tilde{X}_p = r'(0)$. 诱导一个向量场。

Definition (基本向量场)

任一$X \in T_eG$决定的单参数变换群$\theta_X(t) = exp(tX)$; 诱导一个M上的切向量场$\tilde{X}$。称为X在M上决定的一个基本向量场。
历史上称为一个无穷小变换。

特别当G左作用到自己时， 诱导基本向量场是右不变向量场。左不变向量场生成的流是右不变的。$\theta_X \circ R_g = R_g\theta_X$.

- M上的基本向量场是一个李代数；特别它是T_eG的一个同态像。
- 特别当群作用是有效的；诱导一个李代数同构。
  群作用有效，任一$g \neq e$, 存在$g \cdot x \neq x$.即ρ_g非恒同映射；
  即$G \to Diff(M)$是单同态。

轨道空间

Remark

轨道的集合记为M/G; 定义商拓扑$p \sim q$, 如果存在$g \cdot p = q$. 称为轨道空间。

Theorem (商流形)

设李群G自由正则作用于流形M, 则M/G是一个$dimM - dimG$维的光滑流形，且商映射 $\pi : M \to M/G$是光滑淹没映射。

Theorem

设H是李群G的闭正规子群， 则G/H是一个李群。

齐性空间

Definition

M是光滑流形，如果存在李群G可迁的作用于M,称M是一个齐性空间。

EXAMPLE

- $O(n)$可迁作用于S^{n-1}, 类似$SO(n)$作用于S^{n-1}.
- 欧几里德群作用于R^n：
  $E(n)=\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A\in O(n), b\in R^n$
  称R^n为齐性欧氏空间。
- $SL(2,R)$作用于上半空间H^2,给出Mobius变换。
  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z=\frac{az+b}{cz+d}$

齐性空间结构

Theorem

设M是G齐性空间，任一p,$H=G_p=\{g:gp=p\}$是其迷向群,则M和G/H微分同胚。

Proof.

- 验证H是正规子群;
- 定义映射$\phi:G/H\to M$, $\phi(gH)=gp$. 验证ϕ是同胚。

□

Corollary

$S^{n-1}\cong O(n)/O(n-1)\cong SO(n)/SO(n-1)$;
$R^n\cong E(n)/O(n)$,
$H^2=SL(2,R)/SO(2)$.

$\mathbb{EXERCISE}$ ONE

*3/11*课堂交。 注(***)部分是选做.

1. 证明：$\mathcal{R}^n$中的紧致集是有界闭集。
2. 证明：n维线性空间的对偶空间的对偶空间同构与它自身。$((\mathbb{E}^n)^*)^* \cong \mathbb{E}^n$
3. 设$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是$m$次齐次函数，即$f(tX) = t^m f(X)$.若$f$可微，证明：

$$mf(X) = \sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(X)$$

4. 把$n \times n$矩阵的每一列看成R^n中一个元素a,可以将行列式det看成$R^n \times R^n \times R^n \cdots \times R^n \to R$的一个函数。证明：
   (a) det 是一个n重线性函数。
   (b) (***)det 可微。
   (c) 微分为$D(\det)(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$
5. (具有紧支集的无穷可微函数)设 $f : R \to R$ 满足

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & -1 < x1 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) 设

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   证明$g(x)$是一个c^∞函数。进而
   $f(x)$ 是一个c^∞函数。
   (b) 证明任一$\epsilon > 0$存在一个光滑函数

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \epsilon \\ \geq 0, \leq 1 & 0 < x < \epsilon \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

6. (***)给出方向导数的定义。证明其满足线性运算法则和乘积的莱布尼茨法则。

$\mathbb{EXERCISE}$ TWO

*3/25*课堂交。	注(***)部分是选做.

1. 构造正方形的边到单位圆的同胚映射。说明它是否是微分同胚。

2. 给定$\mathbb{S}^n$是单位n维球,$N=(0,0,\ldots,1)$是北极.定义球极投影$\sigma:\mathbb{S}^n-N\to\mathbb{R}^n$, 其中 $\sigma(x^1,x^2,\ldots,x^{n+1})=\frac{(x^1,x^2,\ldots,x^n)}{1-x^{n+1}}$

   记$S=-N$为南极，定义$\sigma_t=-\sigma(-x),x\in\mathbb{S}^n-S$.

   (a) 证明: σ 是双射。
   (b) 证明: σ, σ_t 给出了一个微分结构。并且它与平面投射得到的微分结构是一样的。
   (c) 定义对径映射$\alpha(x)=-x$,写出α在球极投影坐标卡下表示，证明α是一个光滑同胚。

3. 证明n维光滑流形的开子集是光滑流形。说明$M\times N$矩阵中$rank=\min(m,n)$的矩阵是一个光滑流形。

4. 证明光滑映射的复合还是光滑映射。并证明对应的切映射和余切映射的公式。

5. 设M,N是光滑流形,M连通,证明$F:M\to N$是常值映射当且仅当DF在每一点是零映射。

6. 证明:

   (a) 若M和N微分同胚，证明它们的维数相同。
   (b) 设M是紧致光滑流形,证明不存在$f:M\to R^k$的淹没映射.

7. 证明以下流形是单一浸入子流形但不是嵌入子流形。

   (a) $\gamma:(-\pi/2,3\pi/2)\to R^2,r(t)=(\sin 2t,\cos t)$
   (b) $\gamma\mathbb{R}\to T^2=S^1\times S^1\subset\mathbb{C}^2,r(t)=(e^{2\pi it},e^{2\pi ict})$,其中$c$为无理数。

8. 定义水平集$f:R^2\to R,f(x,y)=c$

   (a) $f(x,y)=x^3+xy+y^3$, 说明那些水平集是嵌入子流形。
   (b) $f(x,y)=x^3-y^2$,说明$f(x,y)=0$不是嵌入子流形。可否是浸入子流形呢？

9. ***说明单位圆盘上有无穷多个微分结构。

10. *** 证明:光滑流形上一点处的切向量与在该点处彼此相切的光滑曲线集合是一一对应的。

EXERCISE THREE

*4/8*课堂交。	注(***)部分是选做.

1. 证明：多重线性函数的张量积满足结合律和分配律。
2. 设$f : V \to V$是线性空间上的线性变换。
   (a) 说明f一一对应与V上的$(1,1)$型张量;
   (b) 给出$(1,1)$型张量的基变换公式和坐标变换公式;
   (c) 证明:Kroneck符号δ_i^j是一个$(1,1)$型张量的坐标表示.给出这个张量。
3. (平凡丛)证明：
   (a) $T\mathbb{R}^n$微分同胚与$\mathbb{R}^{2n}$.
   (b) 如果TM是平凡丛，T^*M也是平凡丛.
4. 若$f : M \to N$是光滑映射,证明:$F^* : T^*N \to T^*M$是光滑映射。说明它也是一个丛映射, *给出了一个光滑流形到光滑向量丛的反变函子.
5. (F-相关向量场)
   (a) 给定$F : R \to R^2, F(t) = (\cos t, \sin t)$,证明$\frac{d}{dt}$对应的F-相关向量场是$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.
   (b) 给定$F : R \to R$,$F(t) = t^2$,证明$\frac{d}{dt}$不存在F-相关向量场。
   (c) 如果F是光滑同胚,则任一向量场存在唯一F-相关向量场. (***条件可以减弱为局部同胚,结论也成立.)
6. (Lie Bracket) 给定$\mathbb{R}^3$上的向量场$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, U = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$，计算$[V, W], [W, U], [U, V]$,并验证Jacobi恒等式。
7. 定义$f : R^3 \to R, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.定义$F : R^2 \to R^3, F(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$. 计算$d(f \circ F)$和$F^*df$,验证它们相等。
8. 给定以下$f : M \to R$，计算df，确定满足$df_p = 0$的点集。
   (a) $M = \{(x, y) \in R^2 : x > 0\}; f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.使用标准坐标卡。
   (b) $M = R^n; f(x) = |x|^2$.使用标准坐标卡。
   (c) $M = S^2, f(p) = z(p)$,p是球面上的点，$z(p)$为其z坐标.使用球极投影坐标。

EXERCISE FOUR

$\boxed{\textit{4/22}\text{课堂交。}}$ $\boxed{\text{注(***)部分是选做.}}$

1. 设$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $W = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $V, W \in \mathcal{T}(R^2)$是向量场。
   (a) 计算V, W生成的流θ_V, θ_W
   (b) 计算$\mathcal{L}_V W$
   (c) *** 构造坐标系(u_1, u_2)，使得$V = \frac{\partial}{\partial u_1}, W = \frac{\partial}{\partial u_2}$.
2. 设$\theta(t, x, y) = (xe^{at}, ye^{bt})$,其中$a, b$是常数，证明： θ是全局流。求出它的诱导向量场。
3. (李导数)证明：
   (a) $\mathcal{L}_V[W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$
   (b) $\mathcal{L}_{[V,W]}X = \mathcal{L}_V\mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W\mathcal{L}_V X$
   (c) $\mathcal{L}_V(fW) = (Vf)W + f\mathcal{L}_V W$
4. 设n维光滑流形M有单一的全局坐标卡。证明：
   (a) 任意给定n^3个光滑函数Γ_{ij}^k可以构造一个仿射联络。
   (b) 给出Γ_{ij}^k在基变换下的变换公式。说明Γ_{ij}^k不是张量。
5. 将李导数看作映射$\mathcal{L} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$。 证明李导数不是一个张量，也不是一个联络。特别当联络是对称时($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$), 有$\mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
6. 给定M上度量张量g, 定义M上曲线长度$L_g(r) = \int_a^b |r'(t)|_g dt$. 证明
   (a) 曲线长度不依赖于参数化。即$\tilde{r} = r \circ \phi$的长度与r一样，如果ϕ是微分同胚。
   (b) 存在速度为一的参数化。即$|r'(s)|_g = 1$.称其为弧长参数。
7. 利用度量g给出的切空间和余切空间的对应，给出任一光滑函数f的微分df对应的切向量场$gradf$。写出其局部坐标表示和基变换下的变换公式。特别给出其在欧几里德空间标准度量下的表示。
8. 设∇是(M, g)上黎曼联络，证明：
   (a) V, W是沿r的平行向量场，证明$\langle V, W\rangle_g$沿r为常数。
   (b) 沿r平行移动$P_{ab} : T_{r(a)}M \to T_{r(b)}M$给出一个切空间的等距变换。

$\mathbb{EXERCISE}$ FIVE

5/8课堂交。

1. 设$F : M \to N$是光滑映射，证明：
   (a) $F^* : \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^k(M)$是线性的；
   (b) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$
   (c) 局部坐标卡上有
   $F^*(\sum w_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) = \sum (w_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$
2. 证明李导数与外导数的对偶定理。
   设E_i为光滑流形上的局部标架场，δ^i为对应的局部余标架场。设李导数满足 $[E_j, E_k] = c^i_{jk} E_i$, 对应有外导数$d\delta^i = -c^i_{jk} \delta^j \wedge \delta^k$.
3. 证明
   (a) 可定向流形的开子流形是可定向的。
   (b) 如果M是两个可定向的开子流形的并集，且两个开子流形的交集是连通的，则M是可定向的。
   (c) S^n是可定向的。
4. 设M, N是可定向流形，证明:$F : M \to N$是保定向的映射当且仅当它在任一对定向相容的光滑坐标卡下表示的Jacobi矩阵的行列式大于零。
5. 给定R^3上2-形式$\Omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
   (a) 计算Ω在球坐标(ρ, ϕ, θ)下的表示；
   (b) 计算$d\Omega$在球坐标和欧氏坐标下的表示；说明它们是同一个3-形式。
   (c) 计算诱导在球面上的2-形式$\Omega|_{S^2} = i^*\Omega$,其中$i : S^2 \to R^3$. 用球面坐标$(\phi, \theta)$表示。
   (d) 说明：$\Omega|_{S^2}$处处不为零。进而S^2是可定向流形。
6. 给定$R^3 \backslash \{0\}$上2-形式$\Omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.
   (a) 利用局部坐标卡直接计算单位球面上的积分$\int_{S^2(1)} \Omega = 4\pi$;
   提示：取球面坐标表示(ϕ, θ),球面由两个坐标卡覆盖。$D_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$,$D_2 = [0, \pi] \times [\pi, 2\pi]$.
   (b) 计算任一半径为r的球面上的积分有$\int_{S^2(r)} \Omega = 4\pi$.

EXERCISE SIX

最迟5/27交。

1. 给定(M,g)可定向黎曼流形，证明以下局部坐标卡公式：
   (a) $\operatorname{div}(X^i\partial x_i) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{\det g})$
   (b) $\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial f}{\partial x^j})$
   (c) 特别对于n维欧几里德空间的标准度量，给出其公式。
2. 给定(M,g)为紧致的可定向黎曼带边流形，设N是边界上的单位外法向量场。 证明
   (a) 任意光滑函数f,向量场X,有 $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \operatorname{grad} f, X\rangle_g$
   (b) (分部积分)
   $\int_M \langle \operatorname{grad} f, X\rangle_g dV_g = \int_{\partial M} f\langle X, N\rangle d\tilde{V}_g - \int_M f\operatorname{div}X dV_g$
   (c) (Green 公式) 任意光滑函数u, v,
   $\int_M u\triangle v dV_g = \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_g dV_g - \int_{\partial M} uNv d\tilde{V}_g$
   (d) 说明当M连通且边界为空时，调和函数($\triangle u = 0$)都是常数。 且所有特征根($\triangle u = \lambda u$)为非负。
3. 给出四元数H的定义，证明：如果给定S^3的光滑结构和四元数乘法，则H中的单位元素的集合是一个李群。
4. 计算交换李群R^n和T^n的指数映射。
5. 证明:在同构意义下，只有一个一维李代数，两个二维李代数。说明:所有三维李代数可以看成$gl(2,R)$的子代数。